

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00D05D015A41D43C257354CF2FDDD93F88  
Владелец: РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)  
Действителен: с 11.11.2024 по 04.02.2026

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»  
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
по учебной дисциплине  
ОП. 09 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
программы подготовки специалистов среднего звена  
по специальности  
15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)

Уровень образования:	Среднее профессиональное образование
Специальность	15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)
Наименование квалификации	Техник-мехатроник
Форма обучения	Очная
Срок освоения образовательной программы в соответствии с ФГОС (очная форма)	2 года 10 месяцев (на базе среднего общего образования)
Год начала подготовки	2026 г.
В соответствии с утвержденным УП:	
шифр и наименование дисциплины	ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач
семестры реализации дисциплины	5-6 семестр
форма контроля	Зачет в 5 семестре; экзамен в 6 семестре

Москва, 2026 г.

## **1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Фонд оценочных средств (ФОС) предназначен для контроля и оценки образовательных достижений, обучающихся по программе учебной дисциплины ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач.

ФОС включает контрольные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в форме *зачета в 5 семестре, экзамена в 6 семестре*.

В результате освоения учебной дисциплины элементы высшей математики обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности СПО 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям) профильной подготовки следующими знаниями и умениями:

### **Уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- решать задачи векторной алгебры;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;
- пользоваться понятиями теории пределов.

### **Знать:**

- основы математического анализа, линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел;
- основы теории пределов.

## **2. Цели и задачи фонда оценочных средств.**

Целью ФОС является установление соответствия уровня подготовки обучающихся требованиям федерального государственного образовательного стандарта ФГОС СПО по ОПОП.

ФОС предназначен для решения задач контроля достижения целей реализации ОПОП СПО и обеспечения соответствия результатов обучения области, сфере, объектам профессиональной деятельности, области знаний и типам задач профессиональной деятельности.

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	ПК, ОК	Наименование разделов, тем	Уровен ь освоени я	Наименование контрольно-оценочного средства	
				Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	2	3	4	5	6
<b>У:</b> пользоваться понятиями математики при освоении профессии; <b>З:</b> связь математики с общепрофессиональным и дисциплинами.	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Введение</b> <b>1.</b> Цели и задачи математики при освоении специальности. <b>2.</b> Роль математики в изучении дисциплин профессионального цикла.	2	<b>Входной контроль</b> <b>Реферат-презентация</b>	
<b>У:</b> пользоваться понятиями теории комплексных чисел; <b>З:</b> основы теории комплексных чисел.	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 1.</b> <b>Основы теории комплексных чисел</b>	2	<b>Практическая работа № 1</b> Действия над комплексными числами, Формулы Муавра и Эйлера <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i> Выполнить конспект: показательная функция с комплексным показателем и ее свойства Реферат-презентация	<b>Контрольная работа</b>
<b>У:</b> пользоваться понятиями теории пределов, вычислять пределы; <b>З:</b> основы теории пределов.	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 2.</b> <b>Теория пределов</b>	2	<b>Практическая работа № 2</b> Техника вычисления пределов одномерных функций <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i> Выполнить конспекты «Теоремы о пределах» и «Свойства непрерывных функций» Решение задач Реферат-презентация	<b>Контрольная работа</b>
<b>У:</b> применять методы дифференциального исчисления  <b>З:</b> основные понятия и методы дифференциального исчисления	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 3.</b> <b>Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной</b>	2	<b>Практическая работа № 3</b> Техника дифференцирования одномерных функций. Исследование функции и построение графика функции. <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i>	<b>Контрольная работа</b>
<b>У:</b> применять методы дифференциального исчисления в практических задачах	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 3.1</b> <b>Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах</b>	2		

<b>З:</b> основные понятия и методы дифференциального исчисления в практических задачах				Решение задач физики и механики Дифференцирование функций высших порядков. Решение задач на нахождение наименьшего и наибольшего значений функции. Решение задач в области профессиональной деятельности. Решение прикладных задач на экстремум. Решение задач в области профессиональной деятельности Реферат-презентация	
<b>У:</b> применять методы дифференциального исчисления в профессии  <b>З:</b> основные понятия и методы дифференциального исчисления в профессии	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 3.2</b> <b>Применение производной в профессии</b>	<b>2</b>		
<b>У:</b> применять методы интегрального исчисления одной действительной переменной  <b>З:</b> основные понятия и методы интегрального исчисления одной действительной переменной	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 4.</b> <b>Интегральное исчисление функции одной действительной переменной</b>	<b>2</b>	<b>Практическая работа № 4</b> <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i> Выполнение конспекта «Приложения определенного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, длины дуги плоской кривой, объема тела по площадям параллельных сечений, площади поверхности тела вращения» Вычисление площадей плоских фигур. Решение прикладных задач, связанных с понятием определенного интеграла. Вычисление пути, пройденного телом. Вычисление работы силы. Вычисление силы давления жидкости. Вычисление длины дуги плоской кривой Решение задач в области профессиональной деятельности Реферат-презентация	<b>Контрольная работа</b>
<b>У:</b> применять методы интегрального исчисления в профессии  <b>З:</b> основные понятия и методы интегрального исчисления в профессии	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 4.1</b> <b>Применение определённого интеграла в профессии</b>	<b>2</b>		
<b>У:</b> выполнять операции над	ОК 1,	<b>Тема 5.</b> <b>Матрицы и определители</b>	<b>2</b>	<b>Практическая работа № 5</b>	<b>Контрольная работа</b>

матрицами и решать системы линейных уравнений <b>З:</b> основы линейной алгебры	ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2			Матрицы и действия над ними Вычисление обратной матрицы, определение ранга матрицы Решение матричных уравнений <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i> Выполнение конспекта «Свойства определителей» <i>Терминологический диктант</i> <i>«Азбука линейной алгебры»</i> Реферат-презентация	
<b>У:</b> выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений <b>З:</b> основы линейной алгебры, основы математического анализа	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	<b>Тема 6. Система линейных уравнений</b>	<b>2</b>	<b>Практическая работа № 6</b> Решение систем линейных уравнений однозначной разрешимости матричным методом и по формулам Крамера. Решение системы линейных уравнений матричным методом и методом Гаусса. Решение системы линейных уравнений методом Крамера Терминологический диктант «СЛУ» <i>Контрольная работа</i> <i>Проверочная работа</i> «Основы линейной алгебры» Реферат-презентация	<b>Контрольная работа</b>
<b>У:</b> решать задачи, связанные с векторами; <b>З:</b> основы векторов и действия с ними	ОК 1, ОК 2, ПК1.1 ПК1.2	<b>Тема 7. Векторы и действия с ними</b>	<b>2</b>	<b>Практическая работа № 7</b> Элементарные действия над геометрическими векторами. Базис системы векторов Скалярное произведение двух векторов, его свойства и задачи с ним связанные. Векторное и смешанное произведение векторов, их свойства и задачи, с ним связанные. Практическое применение скалярного,	<b>Контрольная работа</b>

				смешанного, векторного произведения векторов. <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i> Выполнение конспекта: «Векторы в законах физики и механики».	
У: решать задачи, используя уравнения прямой и кривых 2-го порядка на плоскости; З: основы аналитической геометрии	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	Тема 8. Аналитическая геометрия на плоскости	2	<b>Практическая работа №8</b> <i>Уравнение прямой на плоскости, расстояние от точки до прямой, угол между прямыми</i> Составление уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Составление и исследование уравнений окружности и эллипса, гиперболы и параболы Решение практико-ориентированных задач. <i>Самостоятельная работа</i> <i>Проверочная работа</i> Выполнение конспекта «Обзор уравнений и геометрический образ поверхностей второго порядка» Реферат-презентация	<b>Контрольная работа</b>  <b>Вопросы для экзамена</b>
У: решать практико-ориентированные задачи З: основы решения практико-ориентированных задач	ОК 1, ОК 2, ПК 1.1 ПК 1.2	Тема 10.1 Прямые и плоскости в практических задачах	2		

Виды и формы контроля освоения учебной дисциплины

Код	Форма контроля	Вид контроля Т-текущий П-промежуточный)
УО	устный опрос	Т
ПрР	практическая работа	Т
ПР	проверочная работа	Т
КР (п)	письменная контрольная работа	Т
СР	самостоятельная работа	Т
Т	тестирование	Т
К	конспектирование	Т
УП	учебный (индивидуальный) проект	Т
ЭУП	электронная учебная презентация	Т
З	зачет	П
Э	экзамен	П

*Формой промежуточной аттестации является зачет в 5 семестре, экзамен в 6 семестре.*

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен овладеть следующими общими компетенциями(ОК), профессиональными компетенциями (ПК), умениями и знаниями:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.  
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.  
ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

### **3.Типовые задания для контроля и оценки освоения учебной дисциплины**

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины проводится в форме устного опроса, письменных проверочных, контрольных работ, выполнение практических заданий и самостоятельных работ, тестовых заданий и решения задач.

#### **Критерии ошибок:**

К г р у б ы м ошибкам относятся ошибки, которые обнаруживают незнание учащимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской;

К н е г р у б ы м ошибкам относятся: потеря корня или сохранение в ответе постороннего корня; отбрасывание без объяснений одного из них и равнозначные им;

К н е д о ч е т а м относятся: нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях

#### **Критерии оценки устного опроса:**

«5» - Ответ полный, аргументированный

«4» - Ответ требует дополнений

«3» - Ответ раскрывает с наводящими вопросами

«2» - Отказывается отвечать

#### **Критерии оценивания тестовых заданий**

Тест оценивается по 5-бальной шкале следующим образом:

Оценка «5» соответствует 91% – 100% правильных ответов.

Оценка «4» соответствует 71% – 90% правильных ответов.  
Оценка «3» соответствует 51% – 70% правильных ответов.  
Оценка «2» соответствует 0% – 50% правильных ответов.

#### Критерии оценки работы студентов на практическом занятии

Критерии оценки выполнения практических заданий.

Оценка «отлично» ставится, если студент выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполняет все записи, таблицы, рисунки, графики, вычисления; правильно выполняет анализ ошибок.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил требования к оценке "5", но допущены 2-3 недочета.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент выполнил работу не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент выполнил работу не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов;

#### Критерии оценки письменных контрольных (самостоятельных) работ

**Отметка «5»** ставится, если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

**Отметка «4»** ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

**Отметка «3»** ставится, если:

допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

**Отметка «2»** ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере

#### Входной контроль

**Структура контрольной работы** (входного контроля)

На выполнение контрольной работы по математике дается 1,5 часа. Работа состоит из двух частей. Первая часть содержит 10 заданий. К каждому заданию В1-В10 требуется дать краткий ответ. Задания С1, С2 выполняются на отдельном листе, и студент записывает подробное, обоснованное решение.

За выполнение каждого задания студент получает определенное число баллов: задания В1 – В10 оцениваются в 1 балл, С1 – 2 балла, С2 – 3 балла.

Таблица перевода тестовых баллов в отметки.

Тестовый балл	Отметка
0-4	2
5-8	3
9-11	4
12-15	5

#### Вариант 1

##### Часть I

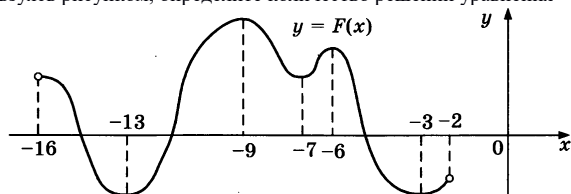


В1. Найдите значение выражения  $\log_4 104 - \log_4 6,5$

В2. Найдите остаток от деления многочлена  $f(x) = 13x^3 + 67x^2 - 3x + 4$  на многочлен  $P(x) = x^2 + 5x + 1$ .

В3. На рисунке изображен график первообразной  $y = F(x)$  некоторой функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-16; -2)$ .

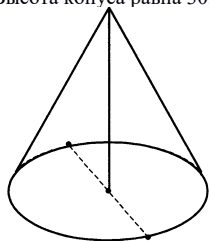
Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-15; -8]$ .



В4. Валя выбирает случайное трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51.

В5. Решите уравнение  $5^{x+5} = 0,04$ .

В6. Высота конуса равна 30, а длина образующей - 34. Найдите диаметр основания конуса.



$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$$

В7. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой

При каком наименьшем значении температура нагревателя  $T_1$  (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет не меньше 80%, если температура холодильника  $T_2 = 200$  К?

В8. Объем цилиндра равен  $12\text{см}^2$ . Чему равен объем конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?

В9. Два автомобиля отправляются в 420 – километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.

В10. Найдите наименьшее значение функции  $y = (x^2 - 9x + 9)$  на отрезке  $[6; 8]$ .

## Часть II

С1. Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

С2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} (5 - x) \geq 0, \\ \frac{2}{x^2 - 4x} + \frac{1}{x^2 - 10x + 24} \leq 0. \end{cases}$$

## Вариант 2

### Часть I

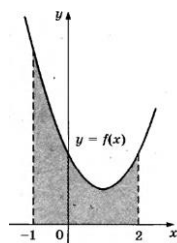
Найдите значение выражения  $\frac{\log_8 14}{\log_{64} 14}$ .

В1.

В2. Найдите остаток от деления многочлена  $f(x) = x^3 - 11x^2 + x + 7$  на многочлен  $P(x) = 2x^2 + 3$ .

В3. На рисунке изображен график первообразной некоторой функции  $y = f(x)$ . Одна из первообразных этой функции равна

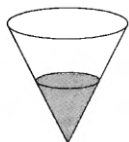
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 5$ . Найдите площадь заштрихованной фигуры.



В4. В фирме такси в данный момент свободно 10 машин: 5 черных, 1 желтая и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет желтое такси.

В5. Решите уравнение  $2^{5-x} = 0,25$ .

В6. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.) Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$$

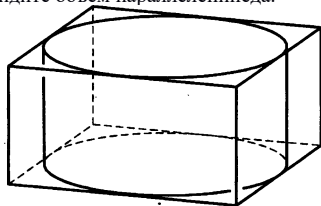
В7. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой

$T_1$  - температура нагревателя (в градусах Кельвина),  $T_2$  - температура холодильника (в градусах

Кельвина) При какой температуре нагревателя  $T_1$  КПД двигателя будет 45%, если температура

холодильника  $T_2 = 275$  К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

В8. Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 6. Найдите объем параллелепипеда.



В9. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

В10. Найдите наибольшее значение функции  $y = (21 - x)$  на отрезке  $[19; 21]$ .

## Часть II

С1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

С2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}(4 - x) \geq 0, \\ \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 10x + 21} \leq 0. \end{cases}$$

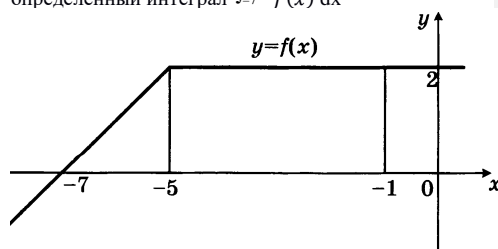
### Вариант 3

#### Часть I

В1. Найдите значение выражения  $\log_6 144 - \log_6 4$ .

В2. Найдите остаток от деления многочлена  $f(x) = x^3 + x$  на многочлен  $p(x) = x^2 + x + 1$

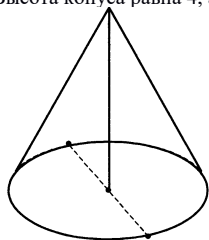
В3. На рисунке изображен график некоторой функции  $y = f(x)$ . Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл  $\int_{-7}^{-1} f(x) dx$



В4. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по круглым червям. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику попадет вопрос по круглым червям.

В5. Решите уравнение  $\left(\frac{1}{6}\right)^{6-x} = 36$ .

В6. Высота конуса равна 4, а длина образующей - 5. Найдите диаметр основания конуса.



В7. Температуру нагревательного элемента (в градусах Кельвина) в зависимости от времени (в минутах) можно вычислять по формуле  $T(t) = T_0 + at + b t^2$ , где  $T_0 = 760$  К,  $a = 34$  К/мин,  $b = -0,2$  К/мин<sup>2</sup>. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

В8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна  $80\pi$ , а высота — 8. Найдите диаметр основания.

В9. Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

В10. Найдите наибольшее значение функции  $y = \ln(x + 5)^9 - 5x$  на отрезке  $[-4, 5; 0]$ .

#### Часть II

С1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

С2. Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0, \\ \log_x(x - 2) \cdot \log_x(x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

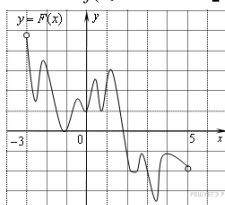
### Вариант 4

#### Часть I

В1. Найдите значение выражения  $(7^{\log_7 5})^{\log_5 2}$ .

В2. Найдите остаток от деления многочлена  $f(x) = x^3 - 2x^4 - 5$  на многочлен  $p(x) = x^3 - 9x$ .

В3. На рисунке изображён график функции  $y = F(x)$  и одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 5)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-2; 4]$ .



В4. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 7 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Боливии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Боливии.

$$16^{x-9} = \frac{1}{2}$$

В5. Найдите корень уравнения:

В6. Длина окружности основания цилиндра равна 7. Площадь боковой поверхности равна 105. Найдите высоту цилиндра.

В7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в

ньютонах, будет определяться по формуле:  $F_A = \alpha \rho g r^3$ , где  $\alpha = 4,2$  – постоянная,  $r$  – радиус аппарата в метрах,  $\rho = 1000$   $\text{м}^3$  – плотность воды, а  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336000 Н? Ответ выразите в метрах.

В8. Диаметр основания конуса равен 136, а длина образующей — 85. Найдите высоту конуса.

В9. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

В10. Найдите наименьшее значение функции на отрезке  $[0; 2]$ .

## Часть II

С1. Две параллельные плоскости, находящиеся на расстоянии 12 друг от друга, пересекают шар. Получившиеся сечения одинаковы, и площадь каждого из них равна 64л. Найдите площадь поверхности шара.

С3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0, \\ \log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8. \end{cases}$$

## Ответы контрольной работы

Вариант	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	С1	С2
1	2	$-26x + 2$	2	0,02	-7	32	1000	4	60	-5	$15/4$	$(0; 4)$
2	2	$-0,5x + 23,5$	6	0,1	7	175	500	864	120	-1	2 или 14	$(1; 3)$
3	2	$-x^2$	10	0,48	8	6	30	10	21	20	$\arctg 3$ или $\arctg 21/17$	3

4	2	$-18x^2 + 9x - 5$	10	0,05	8,75	15	2	51	32	-7	$400\pi$	$[-2;1); (-1;0); (0;1);(1; 2]$
---	---	-------------------	----	------	------	----	---	----	----	----	----------	--------------------------------

### 3.1 Типовые формы тестовых заданий

#### Тесты для текущего контроля

##### Комплексные числа

Выберите один правильный ответ.

**1. На множестве действительных чисел не выполняема операция:**

- а) деления чисел
- б) возведения в степень отрицательного числа
- в) извлечения арифметического корня из отрицательного числа
- г) сравнения чисел

**2. Комплексные числа были введены для получения дополнительных возможностей при решении:**

- а) систем линейных уравнений
- б) квадратных уравнений
- в) уравнений высших степеней
- г) тригонометрических уравнений

**3. Что представляет собой число  $i$ :**

- а) число, квадратный корень из которого равен  $-1$
- б) число, квадрат которого равен  $-1$
- в) число, квадратный корень из которого равен  $1$
- г) число, квадрат которого равен  $1$

**4. Числа  $5$ ;  $3-6i$ ;  $2,7$ ;  $2i$  принадлежат множеству:**

- а) действительных чисел
- б) мнимых чисел
- в) иррациональных чисел
- г) комплексных чисел

**5. Термин «мнимые числа» ввел:**

- а) Декарт
- б) Эйлер
- в) Кардано
- г) Муавр

**6. Из предложенных чисел выберите чисто мнимое число:**

- а)  $z = 5 - 3i$
- б)  $z = 75i$
- в)  $z = 32$
- г)  $z = 0$

**7. Выражение  $z = a + bi$  называется:**

- а) вещественной частью комплексного числа
- б) мнимой частью комплексного числа
- в) тригонометрической формой комплексного числа
- г) алгебраической формой комплексного числа

**8. Числа  $a+bi$  и  $a-bi$  называются:**

- а) сопряженными
- б) противоположными
- в) обратными
- г) мнимыми

**9. Числа  $a+bi$  и  $-a-bi$  называются:**

- а) сопряженными
- б) противоположными
- в) обратными
- г) мнимыми

**10. На координатной плоскости число изображается:**

- а) точкой или радиус-вектором
- б) отрезком
- в) плоской геометрической фигурой
- г) заштрихованной частью плоскости

**11. Модулем комплексного числа называется:**

- а) данное комплексное число без учета знака
- б) расстояние от начала координат до точки, в виде которой отображается комплексное число
- в) расстояние от осей координат до точки, в виде которой отображается комплексное число
- г) сумма вещественной и мнимой части

**12. Модуль комплексного числа  $z = 4 + 3i$  равен:**

- а) 25
- б) 1
- в) 7
- г) 5

**13. Вычислить:  $(3-i) + (-1+2i)$**

- а)  $2+i$
- б)  $4+3i$
- в)  $2+3i$
- г)  $-3-2i$

**14. Вычислить:  $(4-2i) - (-3+2i)$**

- а)  $1-4i$
- б)  $7-4i$
- в) 1

г) 7

**15. Вычислить:  $(4-2i) \times i$**

а)  $2i$

б)  $6i$

в)  $2+4i$

г)  $4i-2$

**16. Вычислить:  $1/i$**

а) 1

б) -1

в)  $i$

г)  $-i$

**17. Вычислить:  $1 / (1-i)$**

а)  $1/2+i/2$

б)  $1/2-1/2i$

в)  $1+i$

г)  $-1+i$

**Критерии оценки:**

15- 18 оценка «5»

10- 15 оценка «4»

7-10 оценка «3»

до 7 оценка «2»

**Ответы к тесту:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
в	б	б	г	а	б	г	а	б	а	б	а	а	б	в	г	а

## ***Теория пределов***

### **Вариант 1**

1. Если каждому числу  $n$  из натурального ряда чисел  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  поставлено в соответствие вещественное число  $x_n$ , то множество вещественных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  называется...?(3-1, 3-2)

а) числовой последовательностью;

б) числовой непрерывностью;

в) числовой предельностью.

2. Что из приведенного ниже не является последовательностью? (3-1, 3-2)

а) последовательность элементов числового пространства

б) функция, определенная на множестве натуральных чисел

в) упорядоченный список элементов некоторого множества

г) постоянная, к которой неограниченно приближается некоторая переменная величина, зависящая от другой переменной величины

3. Какая это последовательность  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$  ?

а) убывающая и ограниченная;

б) возрастающая и ограниченная;

в) возрастающая и неограниченная;

г) неубывающая и неограниченная.

4. Какая функция называется бесконечно малой?

- а)  $a(x) = \infty$                       в)  $a(x) = A$   
 б)  $a(x) = 0$                         г)  $a(x) = 1$

5. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть...?

- а) конечная  
 б) бесконечная  
 в) бесконечно большая  
 г) бесконечно малая

6. Вычислить предел  $\frac{2x^2+x+1}{3x^2-1}$  (У-3, 3-1, 3-2)

- а)  $2/3$ ;                      б)  $2/4$ ;                      в)  $1/2$ ;                      г)  $1/4$ .

7. Вычислить предел  $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$  (ОКЗ, ОК9, У-3, 3-1, 3-2)

- а) 1                      б)  $\infty$                       в) 3                      г) 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

8. Вычислить предел  $x \rightarrow 0$

- а) не существует    б) 0                      в)  $\infty$                       г) 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2x}$$

9. Вычислить предел  $x \rightarrow \infty$  (У-3, 3-1, 3-2)

- а)  $e^2$                       б)  $e$                       в) 1                      г)  $\infty$

10. Вычислить предел  $\left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$  (ОКЗ, У-3, 3-1, 3-2)

- а)  $e$                       б)  $e^6$                       в)  $1/e^5$                       г)  $e^{-1}$

## Вариант 2

1. Если каждому числу  $n$  из натурального ряда чисел 1, 2, 3, ...,  $n$ , ... поставлено в соответствие вещественное число  $x_n$ , то множество вещественных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  называется...?

- а) числовой последовательностью;  
 б) числовой непрерывностью;  
 в) числовой предельностью;

2. Что называют величиной, к которой стремится рассматриваемая функция при стремлении её аргумента к данной точке?

- а) предел функции  
 б) функция, определенная на множестве натуральных чисел  
 в) упорядоченный список элементов некоторого множества  
 г) постоянная, к которой неограниченно приближается некоторая переменная величина, зависящая от другой переменной величин

3. Какая это последовательность  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  ?

- а) убывающая и ограниченная;  
 б) возрастающая и ограниченная;  
 в) возрастающая и неограниченная;  
 г) неубывающая и неограниченная.

4. Какая функция называется бесконечно большой?

- а)  $a(x) = \infty$                       в)  $a(x) = A$   
 б)  $a(x) = 0$                         г)  $a(x) = 1$

5. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть...?



- а) конечная
- б) бесконечная
- в) бесконечно большая
- г) бесконечно малая

6. Вычислить предел  $\frac{2x-3}{x^2+1}$

- а) 0;
- б) 2;
- в) 1;
- г) 4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+2}$$

7. Вычислить предел

- а) не существует;
- б) 0;
- в)  $\frac{2}{3}$ ;
- г)  $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$$

8. Вычислить предел

- а) 1/2
- б) 1/3
- в) 1
- г) 2

9. Вычислить предел  $\left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x$

- а)  $e$
- б)  $1/e^5$
- в)  $e^4$
- г)  $e^{-1/3}$

10. Вычислить предел  $\left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+3}$

- а)  $e$
- б)  $e^4$
- в)  $1/e^5$
- г)  $e^{-1}$

### Вариант 3

1. Если каждому числу  $n$  из натурального ряда чисел  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  поставлено в соответствие вещественное число  $x_n$ , то множество вещественных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  называется...

- а) числовой последовательностью;
- б) числовой непрерывностью;
- в) числовой предельностью;
- г) числовой ограниченностью.

2. Что называют некоторыми широко известными математическими тождествами со взятием предела?

- а) последовательные пределы
- б) великолепные пределы
- в) замечательные пределы
- г) элементарные пределы

3. Какая это последовательность  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ?

- а) убывающая и ограниченная;
- б) возрастающая и ограниченная;
- в) возрастающая и неограниченная;
- г) неубывающая и неограниченная.

4. Какая функция называется бесконечно малой?

- а)  $a(x) = \infty$
- б)  $a(x) = 0$
- в)  $a(x) = A$
- г)  $a(x) = 1$

5. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть...

- а) бесконечно малая

б) бесконечно большая

в) конечная

г) бесконечная

6. Вычислить предел  $\frac{2x^3+4}{x^2+5}$

а) 1

б)  $\infty$

в) 3

г) 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$$

7. Вычислить предел  $x \rightarrow 0$

а) не существует

б)  $\infty$

в) 0

г) 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{x^3+2x^2}$$

8. Вычислить предел  $x \rightarrow \infty$

а) 1/2

б) 0

в) 1

г)  $\infty$

9. Вычислить предел  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

а)  $e$

б)  $1/e^5$

в)  $e^4$

г)  $e^{-1}$

10. Вычислить предел  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+4}$

а)  $e$

б)  $e^6$

в)  $1/e^5$

г)  $e^{-1}$

#### Вариант 4

1. Если каждому числу  $n$  из натурального ряда чисел  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  поставлено в соответствие вещественное число  $x_n$ , то множество вещественных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  называется...?

а) числовой последовательностью;

б) числовой непрерывностью;

в) числовой предельностью;

г) числовой ограниченностью.

2. Что называют некоторыми широко известными математическими тождествами со взятием предела?

а) великолепные пределы

б) замечательные пределы

в) последовательные пределы

г) элементарные пределы

3. Какая это последовательность  $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots$ ?

а) убывающая и ограниченная;

б) возрастающая и ограниченная;

в) возрастающая и неограниченная;

г) неубывающая и неограниченная.

4. Какая функция называется бесконечно большой?

а)  $a(x) = \infty$

в)  $a(x) = A$

б)  $a(x) = 0$

г)  $a(x) = 1$

5. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть...?

а) бесконечно большая

б) бесконечно малая

в) конечная

г) бесконечная

6. Вычислить предел  $\frac{10x}{x^2+1}$

а) 1

б)  $\infty$

в) 3

г) 0

7. Вычислить предел  $\frac{2^x}{2^{x+1}}$

а) 1

б)  $\infty$

в) 3

г) 2

8. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x}$   
 а) не существует б) 0 в)  $\infty$  г) 5
9. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$   
 а)  $e$  б)  $1/e^5$  в)  $e^{-1}$  г)  $e^4$
10. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right)^{5x}$   
 а)  $e$  б) 1 в)  $e^5$  г)  $\frac{1}{e}$

#### Ключи к тестам

№ задания	вариант 1	вариант 2	вариант 3	вариант 4
1	А	А	А	А
2	Г	А	В	Б
3	Б	А	В	Г
4	Б	В	Б	В
5	Г	Г	А	Б
6	А	А	Г	Г
7	Б	В	Г	А
8	Г	Б	В	Г
9	А	Г	Г	В
10	В	Б	А	В

## Дифференциальное исчисление

### Вариант 1

1. Что называется производной функции? (3-1, 3-2)  
 А) основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции;  
 Б) правило нумерации некоторых действительных чисел;  
 В) раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций;  
 Г) один из способов нахождения интеграла.
2. Найдите производную функции  $y = 4x^3$   
 А)  $12x^2$  Б)  $12x$  В)  $4x^2$  Г)  $12x^3$
3. Какая формула относится к правилам вычисления суммы производных? (3-1, 3-2)  
 А)  $(u + v)' = u' + v'$  Б)  $(c)' = 0$  В)  $(shx)' = chx$  Г)  $\pi^2 - 1$
4. Геометрический смысл производной состоит в том, что ...  
 А) она равна пределу функции  
 Б) она равна всегда нулю  
 В) она равна угловому коэффициенту касательной

Г) она равна максимальному значению функции

5. Точка движется по координатной прямой по закону  $x(t) = 5t^2 - 12t + 2$ , где  $x(t)$  — координата точки (в метрах) в момент времени  $t$  (в секундах), в какой момент времени скорость точки будет равна 8 м/с? (ОКЗ, ОК 9, УЗ, 3-1, 3-2)

А) 3      Б) 2      В) 4,5      Г) 3,5

6. Найдите производную функции  $y = x^2 \cos x$ .

А)  $2x \sin x$       Б)  $-2x \sin x$       В)  $2x \cos x + x^2 \sin x$       Г)  $2x \cos x - x^2 \sin x$

7. Найдите производную второго порядка  $y = \sin x$

А)  $-\sin x$       Б)  $\cos x$       В)  $\operatorname{tg} x$       Г)  $\operatorname{ctg} x$

8. Производная функции  $y = e^{\sqrt{x}}$  равна:

А)  $e^{\sqrt{x}}$ ; Б)  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

В)  $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ ; Г)  $\frac{2}{5x^4}$

9. Вычислите значение производной функции  $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$  в точке  $x_0 = 4$ .

А) 21      Б) 24      В) 0      Г) 3,5

10. Найдите значения  $x$ , при которых производная функции  $y = \frac{x-2}{x^2}$  равна 0

А) 8      Б) 12      В) 28      Г) 4

11. Дифференцирование — это...

- А) вычисление предел
- Б) вычисление приращения функции
- В) нахождение производной от данной функции
- Г) составление уравнения нормали

12. Уравнение касательной к данной линии в точке М имеет вид...

- А)  $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$
- Б)  $y = y'(x_0)(x - x_0)$
- В)  $y - y_0 = x - x_0$
- Г)  $y = y * x$

13. Сколько интервалов возрастания имеет функция  $f(x) = 2x^3 - 6x$

А) 1      Б) 2      В) 3      Г) Ни одного

14. Найдите точку минимума функции  $y = (x - 2)^2 e^{x-5}$  (ОКЗ, ОК 9, У1, УЗ, 3-1, 3-2)

- А) 0                      Б) -5                      В) 2                      Г) 18

15. При вычислении производной постоянный множитель можно...

- А) возводить в квадрат  
Б) выносить за знак производной  
В) не принимать во внимание  
Г) принять за нуль

### Вариант 2

1. Сколько интервалов убывания имеет функция  $f(x) = x^3 - 3x$

- А) 1                      Б) 2                      В) 3                      Г) Ни одного

2. Предел отношения приращения функции в точке  $x$  к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю называется...

- А) производной функции  
Б) неопределенным интегралом  
В) пределом функции  
Г) первообразной

3. Найдите производную функции  $y = \cos(5x - 2)$ . (У1, 3-1, 3-2)

- А)  $-2 \sin(5x-2)$       Б)  $-5 \sin(5x-2)$       В)  $5 \sin(5x-2)$       Г)  $\sin(5x-2)$

4. Найдите производную функции  $y = 4x^5 - e^x$ .

- А)  $20x^5 - e^x$       Б)  $20x^5 + e^x$       В)  $4x^4 - e^x$       Г)  $20x^4 - e^x$

5. Если материальная точка движется по закону  $S(t)$ , то первая производная от пути по времени есть...

- А) угловой коэффициент  
Б) ускорение движения  
В) скорость в данный момент времени  
Г) нет верного ответа

6. Найдите производную второго порядка функции  $y = \frac{x+1}{x-1}$

7. Вычислите  $f'(e)$ , если  $f(x) = x^2 \ln x$ .

- А)  $1 + 2e$                       Б)  $2e$                       В)  $e^2 + e$                       Г)  $3e$

8. Точка движется по координатной прямой по закону  $x(t) = 2t^2 - 6t + 12$ , где  $x(t)$  — координата точки (в метрах) в момент времени  $t$  (в секундах), в какой момент времени скорость точки будет равна 8 м/с?

- А) 3                      Б) 2                      В) 4,5                      Г) 3,5

9. Найдите экстремумы функции  $f(x) = x^3 - 48x + 17$

- А)  $f_{\min}(3) = -100$       Б)  $f_{\min}(8) = 145$       В)  $f_{\min}(4) = -111$       Г)  $f_{\min}(1) = -6$   
 $f_{\max}(0) = 17$        $f_{\max}(1) = -30$        $f_{\max}(-4) = 145$        $f_{\max}(4) = 3$

10. Найдите точки перегиба графика функции  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$

- А) (4;5) (2;3)      Б) (1;-6) (3;-86)      В) (0;3) (0;-48)      Г) (0;0) (2;4)

11. Производная постоянной величины равна...

- А) единице  
Б) самой постоянной  
В) не существует  
Г) нулю

12. Найдите точку максимума функции  $y = (x - 2)^2 e^{x-5}$  (ОКЗ, ОК 9, У1, У3, 3-1, 3-2)

- А) 0      Б) -5      В) 2      Г) 18

13. Функция возрастает на заданном промежутке, если...

- А) первая производная положительна  
Б) вторая производная положительна  
В) первая производная отрицательна  
Г) первая производная равна нулю

14. Дифференцирование – это...

- А) вычисление предела  
Б) вычисление приращения функции  
В) нахождение производной от данной функции  
Г) составление уравнения нормали

15. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = (x + 2)^3$  в точке  $x_0 = 3$  (ОКЗ, ОК 9, У1, У3, 3-1, 3-2)

- А) 125      Б) 75      В) 9      Г) 45

### Вариант 3

1. Что называется, производной функции?

- А) основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции;  
Б) правило нумерации некоторых действительных чисел;  
В) раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций;  
Г) один из способов нахождения интеграла.

2. Вычислите значение производной функции  $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$  в точке  $x_0 = 2$ .

- А) 10      Б) 12      В) 8      Г) 6

3. Найдите производную функции  $y = \frac{1}{3}x^6$ .

- А)  $2x^6$       Б)  $2x^5$       В)  $\frac{1}{3}x^5$       Г)  $6x^5$

4. Найдите производную второго порядка функции  $y = (x + 2)^3$ .

- А)  $6(x+2)$       Б)  $4(x+3)$       В)  $-7(x+2)$       Г)  $x+2$

5. Найдите точку минимума функции  $y = (x - 2)^2 e^{x-5}$

- А) 0      Б) -5      В) 2      Г) 18

6. Найдите производную функции  $y = x^2 \cos x$ .

- А)  $2x \sin x$       Б)  $-2x \sin x$       В)  $2x \cos x + x^2 \sin x$       Г)  $2x \cos x - x^2 \sin x$

7. Какая формула относится к правилам вычисления суммы производных?

- А)  $(u + v)' = u' + v'$       Б)  $(c)' = 0$       В)  $(shx)' = chx$       Г)  $\pi^2 - 1$

8. Найдите промежутки монотонности функции  $y = x^3 - 6x^2 + 4$

- А)  $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$  **возрастает**,  $(0;4)$  **убывает**  
Б)  $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$  **убывает**,  $(0;4)$  **возрастает**  
В)  $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$  **возрастает**,  $(1;5)$  **убывает**  
Г)  $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$  **убывает**,  $(1;5)$  **возрастает**

9. Что входит в алгоритм нахождения экстремумов функции с помощью второй производной?

- А) Найти производную  $f'(x)$   
Б) Найти критические точки данной функции, в которых  $f'(x) = 0$   
В) Найти вторую производную  $f''(x) = (f'(x))'$   
Г) Все выше перечисленное

10. Вычислите значение производной функции  $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$  в точке  $x_0 = 4$ .

- А) 21      Б) 24      В) 0      Г) 3,5

11. Ускорение прямолинейного движения равно...

- А) скорости от пути по времени  
Б) первой производной от пути по времени  
В) второй производной от пути по времени  
Г) нулю

12. Производная переменной величины равна...

- А) единице  
Б) самой переменной  
В) не существует  
Г) нулю

13. Найдите точку минимума функции  $y = (3 - x)^2 e^{3-x}$

- А) 3      Б) 1      В) 4      Г) 0

14. Точка движется по координатной прямой по закону  $x(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 2$ , где  $x(t)$  — координата точки (в метрах) в момент времени  $t$  (в секундах). Найдите скорость точки через 5 с после начала движения.

- А) -1      Б) 1      В) -9      Г) 9

15. Геометрический смысл производной состоит в том, что ...

- А) она равна пределу функции  
Б) она равна всегда нулю  
В) она равна угловому коэффициенту касательной  
Г) она равна максимальному значению функции

#### Вариант 4

1. Найдите производную функции  $y = x^3 \cdot \ln x + \ln 4$

- А)  $3x^2 * \ln x + x^2 + \frac{1}{4}$       Б)  $3x^2 * \ln x + x^2$       В)  $3x$       Г)  $3x^2 * \ln x + x^3$

2. Найдите производную функции  $y = \frac{1}{x} - xe^x$ .

$$\text{А) } -e^x - xe^x + \frac{1}{x^2} \quad \text{Б) } xe^x - e^x - \frac{1}{x^2} \quad \text{В) } -xe^x - \frac{1}{x^2} \quad \text{Г) } -xe^x - e^x - \frac{1}{x^2}$$

3. Предел отношения приращения функции в точке  $x$  к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю называется...

- А) пределом функции
- Б) неопределенным интегралом
- В) производной функции
- Г) первообразной.

4. Сколько интервалов возрастания имеет функция  $f(x) = x^3 - 3x$

- А) 1
- Б) 2
- В) 3
- Г) Ни одного

5. Найдите производную второго порядка функции  $y = 3x^3 - 6x^2 + 7x - 1$ .

- А)  $18-12x$
- Б)  $4+3x$
- В)  $18x-12$
- Г)  $7-12$

6. Вычислите значение производной функции  $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$  в точке  $x_0 = 9$ .

- А) 21
- Б) 24
- В) 52
- Г) 3,5

7. Исследуйте функцию  $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$  на монотонность

- А)  $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$  убывает,  $(-1; 3)$  возрастает
- Б)  $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$  возрастает,  $(-1; 3)$  убывает
- В)  $(-\infty; 3)$  возрастает,  $(3; +\infty)$  убывает
- Г)  $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$  убывает,  $(-3; 1)$  возрастает

8. Найти производную функции  $y = x \cdot \cos x$

- А)  $x \cdot \sin x$
- Б)  $\cos x - x \cdot \sin x$
- В)  $2x \sin x$
- Г)  $\log x$

9. Производная функции  $y = e^{\sqrt{x}}$  равна:

А)  $e^{\sqrt{x}}$ ; Б)  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

В)  $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ ; Г)  $\frac{2}{5x^4}$

10. Вычислите значение производной функции  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x$  в точке  $x_0 = 2$ .

- А) 13
- Б) -3
- В) 8
- Г) 27

11. Уравнение касательной к данной линии в точке  $M$  имеет вид...

- А)  $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$
- Б)  $y = y'(x_0)(x - x_0)$
- В)  $y - y_0 = x - x_0$
- Г)  $y = y \cdot x$



12. Точка движется по координатной прямой по закону  $x(t) = \frac{t^2}{2} + 4t + 2$ , где  $x(t)$  — координата точки (в метрах) в момент времени  $t$  (в секундах). Найдите скорость точки через 5 с после начала движения.

- А) -1      Б) 1      В) -9      Г) 9

13. Дифференцирование – это...

- А) вычисление предела  
Б) вычисление приращения функции  
В) нахождение производной от данной функции  
Г) составление уравнения нормали

14. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = (x - 2)^3$  в точке  $x_0 = 6$

- А) 64      Б) 12      В) 48      Г) 0

15. Функция убывает на заданном промежутке, если...

- А) первая производная положительна  
Б) вторая производная отрицательна  
В) первая производная отрицательна  
Г) первая производная равна нулю

#### Ключи к тестам

№ задания	вариант 1	вариант 2	вариант 3	вариант 4
1	А	А	А	Б
2	А	А	Б	Г
3	А	Б	Б	А
4	В	Г	А	Б
5	Б	В	В	В
6	Г	$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$	Г	В
7	А	Г	А	А
8	Б	Г	А	Б
9	А	В	Г	Б
10	Г	Б	А	Б
11	В	Г	В	А
12	А	А	А	Г
13	Б	А	А	В
14	В	В	А	В
15	Б	Б	В	В

#### Интегральное исчисление

##### 1. Неопределенный интеграл

1. Функция  $F$  называется первообразной для функции  $f$  на некотором промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка существует производная

$F'(x)$ , равная  $f(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$  это...

- а) формула Ньютона-Лейбница;  
б) дифференциал функции;  
в) первообразная для функции  $f$ ;  
г) производная в точке.

2. Множество первообразных для данной функции  $f(x)$  называется...

- а) функцией;

- б) неопределенным интегралом;
  - в) постоянным множителем;
  - г) частной производной.
3. Операция нахождения неопределенного интеграла называется...
- а) дифференцированием функции;
  - б) преобразованием функции;
  - в) интегрированием функции;
  - г) нет верного ответа.
4. Непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям это...
- а) методы нахождения производной;
  - б) методы интегрирования;
  - в) методы решения задачи Коши;
  - г) все ответы верны.
5. Производная от неопределенного интеграла равна...
- а) подынтегральной функции;
  - б) постоянной интегрирования;
  - в) переменной интегрирования;
  - г) любой функции.
6. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен...
- а) произведению интегралов этих функций;
  - б) разности этих функций;
  - в) алгебраической сумме их интегралов;
  - г) интегралу частного этих функций.
7. Определенный интеграл вычисляют по формуле...
- а)  $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$
  - б)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
  - в)  $\int_a^b f(x)dx = F(a) + F(b)$
  - г)  $\int_a^b f(x)dx = F(a)$
8. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен...
- а) единице;
  - б) бесконечности;
  - в) нулю;
  - г) указанному пределу.
9. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл...
- а) остается прежним;
  - б) меняет знак;
  - в) увеличивается в два раза;
  - г) равен нулю.
10. Определенный интеграл используется при вычислении...
- а) площадей плоских фигур;
  - б) объемов тел вращения;
  - в) пройденного пути;
  - г) всех перечисленных элементов.
11. Формула Ньютона-Лейбница

а)

$$\int_b^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

б)  $\int_b^a f(t)dt = F(a) - F(b)$

в)  $\int_b^a f(t)dt = F(a) - F(b) + \tilde{n}$

г)  $\int_b^a f(t)dt = F(b) - F(a) + \tilde{n}$

12. Вычисление пути, пройденного материальной точкой производится по формуле:

а)  $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

б)  $S = \int f(t)dt$

в)  $S = \int_{t_2}^{t_1} f(t)dt$

г)  $S = dt \int_{t_1}^{t_2} f(t)$

13. Если криволинейная трапеция, ограниченная линией  $y = f(x) \geq 0$  и прямыми  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$ , вращается вокруг оси  $x$ , то объем вращения вычисляется по формуле

а)  $V = \pi \int_b^a y^2 dx$

б)  $V = \pi \int_b^a x^2 dx$

в)  $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

г)  $V = \pi \int_a^b x^2 dx$

14. Если  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой линией, двумя прямыми  $x=a$  и  $x=b$  и отрезком оси абсцисс  $a \leq x \leq b$ , вычисляется по формуле

а)  $S = \int_b^a f(x)dx$

б)  $S = \int_a^b f(x)dx$

$$\text{в) } S = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{г) } S = f(x) \int_a^b dx$$

15. Укажите первообразную функции  $f(x) = 3x^2 - \sin x$

а)  $F(x) = x^3 - \cos x$

б)  $F(x) = x^2 - \sin x$

в)  $F(x) = x^2 + \cos x$

г)  $F(x) = 2 - \cos x$

16. Множество всех первообразных функции  $y = 5x^4$  имеет вид

а)  $x^5$ ; б)  $5x^5 + C$ ; в)  $x^5 + C$ ; г)  $5x^3 + C$ .

## 2. Определенный интеграл

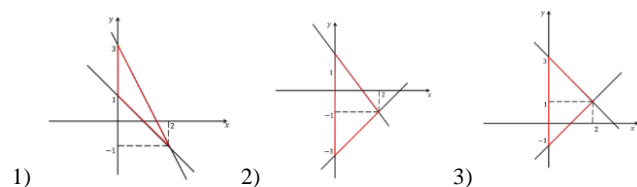
### Задание № 1

Вопрос:

Укажите на каком рисунке изображена фигура, ограниченная линиями

$$y = 1 - x, \quad x = 0, \quad y = 3 - 2x$$

Выберите один из 3 вариантов ответа:



### Задание № 2

Вопрос:

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 1 - x, \quad y = 3 - 2x, \quad x = 0$$

Запишите число:

---

### Задание № 3

Вопрос:

Выберите те значения, которые являются границами интегрирования, при нахождении площади фигуры, ограниченной линиями

$$y = 0, x = 1, x = e, y = \frac{1}{x}$$

Выберите несколько из 4 вариантов ответа:

- 1) 0
- 2) 1
- 3) 2
- 4) e

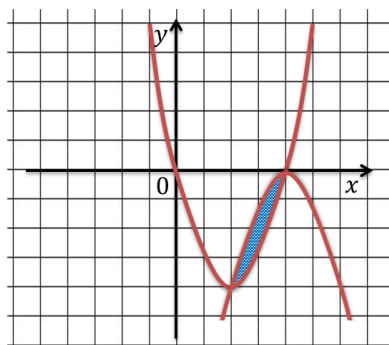
#### Задание № 4

Вопрос:

Укажите формулу для вычисления площади фигуры, график которой изображен на рисунке.

Фигура ограничена линиями  $y = x^2 - 4x$ ,  $y = -(x - 4)^2$

Изображение:



Выберите один из 3 вариантов ответа:

$$1) \int_0^4 (x^2 - 4x) dx$$

$$2) \int_2^4 (-(x - 4)^2 - (x^2 - 4x)) dx$$

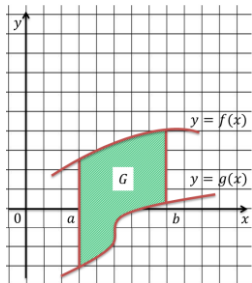
$$3) \int_0^4 (-(x - 4)^2) dx$$

#### Задание № 5

Вопрос:

Укажите формулу для вычисления площади фигуры, график которой изображен на рисунке.

Изображение:



Выберите один из 3 вариантов ответа:

1)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$

2)  $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$

3)  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

#### Задание № 6

Вопрос:

Выберите те значения, которые являются границами интегрирования, при нахождении площади фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin x, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$$

Выберите несколько из 4 вариантов ответа:

1) 1

2) 2

3)  $\pi$

4)  $\frac{\pi}{2}$

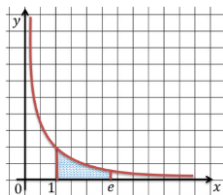
#### Задание № 7

Вопрос:

Вычислить площадь фигуры, показанной на рисунке. Эта фигура ограничена линиями

$$y = 0, x = 1, x = e, y = \frac{1}{x}$$

Изображение:



Запишите число:

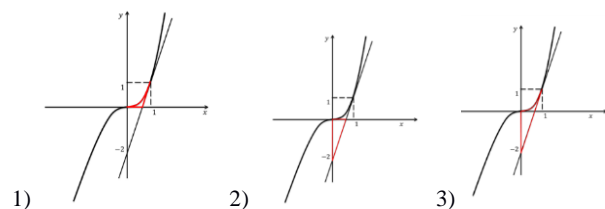
### Задание № 8

Вопрос:

Укажите на каком рисунке изображена фигура, ограниченная линиями

$$y = 3x - 2, \quad y = x^3, \quad x = 0$$

Выберите один из 3 вариантов ответа:



### Задание № 9

Вопрос:

С помощью какой формулы можно найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3, \quad y = 3 - 2x, \quad x = 0$$

Выберите один из 3 вариантов ответа:

1)  $\int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx$

2)  $\int_1^0 (x^3 - 3x + 2) dx$

3)  $\int_0^1 (3x - x^3 - 2) dx$

### Задание № 10

Вопрос:

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3, \quad y = 3 - 2x, \quad x = 0$$

Ответ запишите в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной запятой.

Запишите число:

### Задание № 11

Вопрос:

Выберите первообразную для функции  $f(x) = 5x + 15$

Выберите один из 4 вариантов ответа:

- 1)  $F(x) = x^4$                       а)  $-2 \cdot \sqrt{x+5} + C$   
2)  $F(x) = \frac{1}{3}x^2$                       б)  $\int \cos 5x dx$   
3)  $F(x) = 3x^2$                       в)  $5\sin 5x + C$   
4)  $F(x) = 0,25x^4 + 15$                       г)  $-\frac{1}{5} \cdot \sin 5x + C$

### Матрицы и определители

1.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

- ☐  $a_{11} \cdot a_{12} - a_{21} \cdot a_{22}$
- ☐  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$
- ☐  $a_{11} \cdot a_{22} + a_{21} \cdot a_{12}$
- ☐  $a_{11} \cdot a_{21} - a_{12} \cdot a_{22}$

2. По правилу треугольника  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

- ☐  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$
- ☐  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$
- ☐  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$
- ☐  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$

3. Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя

- ☐ вычеркиванием любой строки и столбца, в котором стоит данный элемент
- ☐ вычеркиванием строки, в которой стоит данный элемент и любого столбца
- ☐ вычеркиванием любой строки и любого столбца
- ☐ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент



4. Для элемента  $a_{ij}$  определителя третьего порядка алгебраическое дополнение этого элемента  $A_{ij} =$

☐  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

☐  $(-1)^{i-j} \cdot M_{ij}$

☐  $(-1)^i \cdot M_{ij}$

☐  $(-1)^j \cdot M_{ij}$

5. По теореме Лапласа  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

☐  $a_{11} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{33}$

☐  $a_{11} \cdot A_{12} + a_{12} \cdot A_{23} + a_{13} \cdot A_{32}$

☐  $a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

☐  $a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{33}$

6. Определитель  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$  равен

☐ -2

☐ 22

☐ -22

☐ 2

7. Определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  равен

○ 8

○ -8

○ 6

○ -6

8. Определитель равен нулю, если

- элементы какой-нибудь строки определителя равны элементам какого-нибудь столбца
- элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца)
- элементы каких-нибудь строк пропорциональны
- элементы каких-нибудь столбцов пропорциональны

9. Определитель не изменится, если

- переставить местами две строки
- переставить местами два столбца
- строки определителя заменить столбцами, а столбцы - соответствующими строками
- поделить элементы какой-нибудь строки (столбца) на их общий делитель

10. Определитель треугольного вида равен

- произведению элементов главной диагонали
- сумме элементов главной диагонали
- произведению элементов побочной диагонали
- сумме элементов побочной диагонали

11. Матрица называется квадратной, если

- число ее строк меньше числа столбцов
- число ее строк равно числу столбцов
- число строк больше числа столбцов
- все элементы главной диагонали нули

12. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется

- нулевой
- единичной
- диагональной
- вырожденной

13. Если у диагональной матрицы все диагональные элементы равны единице, то матрица называется

- нулевой

- единичной
- диагональной
- вырожденной

14. Матрица любого размера, все элементы которой равны нулю, называется

- нулевой
- единичной
- диагональной
- вырожденной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Сумма матриц  $A$  и  $B$  равна

○  $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

16. Произведение матриц  $AB$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  равно

○  $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

17. Матрица  $A^{-1}$  называется обратной по отношению к квадратной матрице  $A$ , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается

- нулевая матрица
- невырожденная матрица
- единичная матрица
- диагональная матрица

18. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда исходная матрица

- вырожденная
- невырожденная
- диагональная
- единичная

19. Матрица, обратная матрице  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  равна

○  $\begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 9/5 & 2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ 12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} 9/5 & 2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$

○  $\begin{pmatrix} -9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & -7/5 \end{pmatrix}$

### Система линейных алгебраических уравнений

1. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется
  - совместной
  - несовместной
  - определенной
  - неопределенной
2. Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет
  - более одного решения
  - единственное решение
  - хотя бы два решения
  - не менее одного решения
3. Определитель системы линейных уравнений состоит
  - из всех ее коэффициентов
  - из коэффициентов при переменных
  - из свободных коэффициентов
  - из переменных
4. Вспомогательный определитель системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными  $\Delta_i$  получается из определителя системы  $\Delta$ 
  - заменой  $i$ -й строки столбцом свободных членов
  - заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов
  - заменой  $i$ -й строки  $i$ -м столбцом
  - заменой  $i$ -го столбца  $i$ -й строкой
5. Решением системы уравнений 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$
 является
  - (1,2,4)
  - (2,1,4)
  - (4,2,1)
  - (4,1,2)

### Векторы и действия над ними

1. Расстояние  $d$  между точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  определяется по формуле

☐  $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}$

☐  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

☐  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$

☐  $d = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

2. Координаты точки  $C(x; y)$ , делящей отрезок между точками  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  в заданном отношении  $\lambda$  определяются по формулам

☐  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

☐  $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 + \lambda}$

☐  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 - \lambda}$

☐  $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

3. Координаты середины отрезка определяются формулами

☐  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 - y_2}{2}$

☐  $x = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 - y_2}{2}$

☐  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

☐  $x = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

6. Точки  $A(-2;5)$ ,  $B(4;17)$  – концы отрезка  $AB$ . На отрезке находится точка  $C$ , расстояние которой от  $A$  в два раза больше расстояния от  $B$ . Координаты точки  $C$

☐  $(13;2)$

☐  $(2;13)$

☐  $(6;2)$

☐  $(13;4)$

7. Точка  $C(2;3)$  служит серединой отрезка  $AB$ . Если  $B(7;5)$ , то координаты точки  $A$

☐  $(3;-1)$

- (1;-3)
- (-1;3)
- (-3;1)

8. Расстояние между точками  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  определяется по формуле

- $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- $d = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)}$
- $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$
- $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$

9. Точка на оси  $Ox$ , равноудаленная от точек  $A(2;-4;5)$  и  $B(-3;2;7)$

- (1,7;0;0)
- (1;0;0)
- (-1,7;0;0)
- (-1;0;0)

10. Векторы расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются

- компланарными
- сонаправленными
- равными
- коллинеарными

11. К линейным операциям над векторами относятся

- вычисление скалярного произведения векторов
- вычисление смешанного произведения векторов
- сложение, вычитание и умножение вектора на число
- вычисление векторного произведения

12. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются

- компланарными
- сонаправленными
- равными
- коллинеарными

13. Вектор  $a$  с координатами  $(5,8,-1)$  имеет разложение по осям координат

☐  $8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

☐  $8\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$

☐  $5\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

☐  $5\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$

14. Длина вектора  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$  равна

☐ 26

☐ 12

☐ 1

15. Если  $A(2;4;11)$  и  $B(5;8;-1)$ , то вектор  $\vec{AB}$  равен

☐  $-3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$

☐  $3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$

☐  $-3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$

☐  $3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$

16. Длину вектора выражают через его координаты по формуле

☐  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

☐  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z}$

☐  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$

☐  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$

17. Скалярным произведением двух векторов называется произведение

☐ их модулей

☐ их модулей, умноженное на синус угла между ними

☐ их модулей, умноженное на тангенс угла между ними

☐ их модулей, умноженное на косинус угла между ними



18. Скалярное произведение векторов  $a=3i+4j+7k$  и  $b=2i-5j+2k$

- ☐ 10
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ -1

19. Векторы  $a=mi+3j+4k$  и  $b=4i+mj-7k$  перпендикулярны при  $m=$

- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ 2

20. Значение векторного произведения равно

- ☐ площади треугольника, построенного на данных векторах
- ☐ площади параллелограмма, построенного на данных векторах
- ☐ периметру треугольника, построенного на данных векторах
- ☐ высоте параллелограмма, построенного на данных векторах

21. Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $a=6i+3j-2k$  и  $b=3i-2j+6k$  равна

- ☐ 47
- ☐ 48
- ☐ 49
- ☐ 45

22. Смешанное произведение векторов позволяет определить

- ☐ поверхность параллелепипеда, построенного на данных векторах
- ☐ объем параллелепипеда, построенного на данных векторах
- ☐ высоту параллелепипеда, построенного на данных векторах
- ☐ объем тетраэдра, построенного на данных векторах

23. Если два из трех данных векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно

- ☐ 1
- ☐ -1

☐ 0

☐ невозможно определить

#### Аналитическая геометрия на плоскости

##### 1. Общее уравнение прямой

☐  $Ax + By + C = 0$

☐  $y = kx + b$

☐  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

☐  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

##### 24. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

☐  $Ax + By + C = 0$

☐  $y = kx + b$

☐  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

☐  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

##### 25. Уравнение прямой в отрезках

☐  $Ax + By + C = 0$

☐  $y = kx + b$

☐  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

☐  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

##### 26. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

☐  $Ax + By + C = 0$

☐  $y = kx + b$

☐  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

☐  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

27. Прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  параллельны, если

☐  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

☐  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1}$

☐  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_1}{B_2}$

☐  $\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{A_2}$

28. Прямая определяемая уравнением  $Ax + By = 0$

- ☐ параллельна оси Ох
- ☐ параллельна оси Оу
- ☐ проходит через начало координат
- ☐ совпадает с осью Ох

29. Общее уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки  $a = \frac{2}{5}$ ,  $b = -\frac{1}{10}$

☐  $5x + 20y - 2 = 0$

☐  $5x - 20y - 2 = 0$

☐  $5x + 20y + 2 = 0$

☐  $5x + 20y - 1 = 0$

30. Прямая  $12x - 5y - 65 = 0$  отсекает на осях координат отрезки

☐  $a = -13$   $b = \frac{65}{12}$

- ☐  $a = 13 \quad b = \frac{65}{12}$
- ☐  $a = \frac{65}{12} \quad b = -13$
- ☐  $a = -\frac{65}{12} \quad b = 13$

31. Прямая  $2y + 3 = 0$

- ☐ параллельна оси Oy
- ☐ параллельна оси Ox
- ☐ проходит через начало координат
- ☐ совпадает с осью Oy

32. Уравнение прямой, проходящей через точки A(-2;5), B(2;6)

- ☐  $x - 4y + 22 = 0$
- ☐  $x + 4y + 22 = 0$
- ☐  $x - 4y - 22 = 0$
- ☐  $4x - y + 22 = 0$

33. Расстояние  $d$  от точки  $(x_0; y_0)$  до прямой

- ☐  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ☐  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 - B^2}}$
- ☐  $d = \frac{|x_0 + y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ☐  $d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

34. Расстояние от точки A(4;3) до прямой  $3x + 4y - 10 = 0$

- ☐ 28
- ☐ 2,8
- ☐ 14

○ 3,5

35. Уравнение окружности с центром в точке C(a;b) и радиусом, равным R

○  $x^2 + y^2 = R^2$

○  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

○  $(x-a)^2 - (y-b)^2 = R^2$

○  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R$

36. Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным R

○  $x^2 + y^2 = R^2$

○  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

○  $(x-a)^2 - (y-b)^2 = R^2$

○  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R$

37. Уравнение окружности с центром C(-4;3) , радиусом R=5

○  $x^2 + y^2 = 25$

○  $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

○  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$

○  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

38. Координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

○ (2; -3)

○ (2; -4)

○ (-2; 4)

○ (3; , 5)

39. Каноническое уравнение эллипса

○  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$

☐  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = -1$

☐  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$

☐  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = -1$

40. Полуоси эллипса и фокусное расстояние связаны равенством

☐  $a = c + b$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

41. Эксцентриситет эллипса  $e$  равен отношению

☐  $\frac{c}{a}$

☐  $\frac{c}{b}$

☐  $\frac{a}{c}$

☐  $\frac{b}{c}$

42. Эксцентриситет эллипса  $x^2 + 4y^2 = 16$

☐  $\frac{1}{2}$

☐  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☐  $\frac{2}{3}$

☐  $\frac{3}{2}$

43. Каноническое уравнение гиперболы

☐  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

☐  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = -1$

☐  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

☐  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = -1$

44. Асимптоты гиперболы

☐  $y = \pm \frac{a}{b} x$

☐  $y = \pm \frac{a}{c} x$

☐  $y = \pm \frac{b}{c} x$

☐  $y = \pm \frac{b}{a} x$

45. Расстояние от фокуса до центра и полуоси гиперболы связаны соотношением

☐  $c^2 = a^2 + b^2$

☐  $c^2 = a^2 - b^2$

☐  $c^2 = b^2 - a^2$

☐  $c = a + b$

46. Если расстояние между фокусами гиперболы равно 10, а вещественная ось равна 8, то каноническое уравнение гиперболы

☐  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

☐  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

☐  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

☐  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

47. Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси  $Ox$  имеет вид

☐  $x^2 = 2py$

☐  $y^2 = 2px$

☐  $y = x^2$

☐  $x^2 = \frac{1}{2}px$

48. Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси  $Oy$  имеет вид

☐  $x^2 = 2py$

☐  $y^2 = 2px$

☐  $y = x^2$

☐  $x^2 = \frac{1}{2}px$

49. Фокус параболы  $y^2 = 4x$

☐  $F(2;0)$

☐  $F(-2;0)$

☐  $F(1;0)$

☐  $F(-1;0)$

50. Уравнение директрисы параболы  $x^2 = 4y$



○  $y = -1$

○  $y = 1$

○  $x = -1$

○  $x = 1$

### 3.2 Проверочные работы

#### Проверочная работа по теме «Комплексные числа»

##### Вариант 1

1.  $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$

2. Даны комплексные числа:  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = i + 1$ ,  $z_3 = -1 - i$ .

Вычислите:

а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_1 + z_3$ ; в)  $z_1 - z_2$ ; г)  $z_2 - z_3$ ; д)  $z_1 \cdot z_2$ ; е)  $z_3 \cdot z_2$ .

3. Вычислите: а)  $(2 - i)(2 + i) - (3 - 2i) + 7$ ;

4. Найти частное комплексных чисел: а)  $\frac{1}{1+i}$ ; б)  $(2-4i)/(3-5i)$

5. Решите уравнения в комплексных числах:

а)  $x^2 - 4x + 8 = 0$ ; б)  $x^2 + 6x + 25 = 0$

##### Вариант 2

1.  $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$

2. Даны комплексные числа:  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = 3i + 1$ ,  $z_3 = -2 - i$ .

Вычислите:

а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_1 + z_3$ ; в)  $z_1 - z_2$ ; г)  $z_2 - z_3$ ; д)  $z_1 \cdot z_2$ ; е)  $z_3 \cdot z_2$ .

3. Вычислите: а)  $(3 + i)(3 - i) - (6 + 2i) + 7$ ;

4. Найти частное комплексных чисел: а)  $\frac{1}{1-i}$ ; б)  $(3-5i)/(2-4i)$

5. Решите уравнения в комплексных числах:

а)  $x^2 - 8x + 17 = 0$ ; б)  $x^2 - 3x + 8,5 = 0$

#### Ответы проверочной работы

1 вариант		2 вариант	
Задание 1: 0		Задание 1: 0	
Задание 2		Задание 2	
а) $z_1 + z_2$ ;	3-2i	а) $z_1 + z_2$ ;	3+4i
б) $z_1 + z_3$ ;	1-4i	б) $z_1 + z_3$ ;	0
в) $z_1 - z_2$ ;	1-4i	в) $z_1 - z_2$ ;	1-2i
г) $z_2 - z_3$ ;	2+2i	г) $z_2 - z_3$ ;	3+4i
д) $z_1 \cdot z_2$ ;	5-i	д) $z_1 \cdot z_2$ ;	-1+7i
е) $z_3 \cdot z_2$ ;	-2i	е) $z_3 \cdot z_2$ ;	1-7i

Задание 3 а) $9-2i$ б) $(13/17)-(1/17i)$ Задание 4 а) $x_{1,2}=-2\pm 2i$ б) $x_{1,2}=-3\pm 4i$	Задание 3 а) $11-2i$ б) $(13/10)+(i/10)$ Задание 4 а) $x_{1,2}=4\pm i$ б) $x_{1,2}=3/2\pm 5/2i$
--	---

### Проверочная работа по теме «Теория пределов»

#### Вариант 1

Вычислите пределы.

1.  $\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5};$

2.  $\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}};$

3.  $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2};$

4.  $\frac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1};$

5.  $\left(1-\frac{2}{x}\right)^x.$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{\sin 12x}$

#### Вариант 2

Вычислите пределы.

1.  $\frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1};$

2.  $\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}};$

3.  $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2};$

4.  $\frac{5x^4-x^3+2x}{x^4-8x^3+1};$

5.  $\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}.$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 13x}$

### Проверочная работа по теме «Дифференциальное исчисление»

#### Вариант 1

1. Найти производную функции  $y = \sin 6(4x^3 - 2).$

2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 3x^4 + \cos 5x.$

3. Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^3$  в точке с абсциссой

$x_0 = -1, x_0 = 1.$

4. Материальная точка движется по закону  $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t.$  Найти скорость

и ускорение в момент времени  $t=5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

#### Вариант 2

1. Найти производную функции  $y = \cos 4(6x^2 + 9).$

2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 2x^5 - \sin 3x.$

3. Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 2x - x^2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 2$ .
4. Материальная точка движется по закону  $x(t) = t^3 - 4t^2$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t=5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

#### Вариант 3

1. Найти производную функции  $y = \lg 5 (3x^4 - 13)$ .
2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 4x^3 - 5e^x$ .
3. Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^2 + 1$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$ .
4. Материальная точка движется по закону  $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t=5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

#### Вариант 4

1. Найти производную функции  $y = \operatorname{ctg} 4 (5x^3 + 6)$ .
2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 5x^4 - \cos 4x$ .
3. Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^3 - 1$  в точке с абсциссой  $x_0 = -1$ ,  $x_0 = 2$ .
4. Материальная точка движется по закону  $x(t) = t^4 - 2t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t=5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Материальная точка движется по закону  $x(t) = 2t^3 - 8$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t=5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

#### Вариант 5

1. Найти производную функции  $y = \operatorname{arctg} 6 5x^4$ .
2. Найти производную третьего порядка функции  $y = 6x^5 + 4e^x$ .
3. Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 1 + \cos x$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .
4. Материальная точка движется по закону  $x(t) = t^4 + 2t$ . Найти скорость и ускорение в момент времени  $t=5$  с. (Перемещение измеряется в метрах.)

### Проверочная работа по теме «Интегральное исчисление»

#### 1. Неопределенный интеграл

**Вариант 1**

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-4).

$$1. \int 3x^8 - x^5 + x^4 dx$$

$$x^5$$

$$2. \int (6x \cdot 32x - 4) dx.$$

$$3. \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$4. \int \frac{dx}{1+16x^2}$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 5-7).

$$5. \int (8x - 4)^3 dx.$$

$$6. \int \frac{12x^3 + 5}{3x^4 + x} dx$$

$$7. \int x^5 \cdot e^{x^6} dx.$$

8. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int (x + 5) \cos x dx.$$

**Вариант 2**

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-4).

$$1. \int x^9 - 3x^7 + 2x^6 dx.$$

$$2. \int (7x^2 - 2x + 5) dx.$$

$$3. \int \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$4. \int \frac{4-x}{9x^2} dx.$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 5-7).

$$5. \int (7x+5)^4 dx.$$

$$6. \int \frac{18x^2 - 3}{3x^3 + 8} dx.$$

$$7. \int x^7 \cdot e^{x^8} dx.$$

8. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int (x-2)\sin x dx.$$

## 2. Определенный интеграл

1. Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^2 (4x^2 + x - 3) dx$ , (У-2, З-1, З-2)
2. Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ , (ОКЗ, ОК 9, У-2, З-1)
3. Вычислить определенный интеграл методом подстановки  $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$  (У-2, З-1, З-2)
4. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = -x^2 + 6$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ . (ОК2, ОКЗ, ОК 9, У-2, УЗ, З-1, З-2)
5. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ . (ОК2, ОКЗ, ОК 9, У-2, УЗ, З-1, З-2)
6. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 + 2t + 1$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за три секунды от начала движения. (ОК2, ОКЗ, ОК 9, У-2, УЗ, З-1, З-2)
3. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 9t^2 - 8t$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за четвертую секунду. (ОК2, ОКЗ, ОК 9, У-2, УЗ, З-1, З-2)

## 3. Вычисление площади плоской фигуры

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.  
(ОК2, ОК3, У-2, У3, 3-1, 3-2)

Вариант 1

- 1.  $y = -x^2 + 4; y = 0.$
- 2.  $y = x^2; y = 9.$

Вариант 2

- 1.  $y = x^2 + 3; x = 0; x = 2; y = 0.$
- 2.  $y = -x^2 + 6; y = 2.$

Вариант 3

- 1.  $y = x^2 - 2x; x = 2; x = 4; y = 0.$
- 2.  $y = x^2 + 2; y = x + 4.$

Вариант 4

- 1.  $y = -x^2 + 4x; x = 2; y = 0.$
- 2.  $y = x^2; y = x + 2.$

Проверочная работа по теме «Матрицы и определители»

Вычислить определитель второго порядка <b>всем</b>	Вычислить определитель второго порядка <b>всем</b>
$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$
<b>1 вариант</b> Вычислить определитель по первой строке	<b>2 вариант</b> Вычислить определитель по первой строке
$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ Вычислить определитель по правилу треугольника	$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & -7 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix}$ Вычислить определитель по правилу треугольника
$\begin{vmatrix} 6 & -8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ -5 & -3 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 2 & 5 & 5 \\ -9 & -4 & -8 \end{vmatrix}$
<b>3 вариант</b> Вычислить определитель по третьему столбцу	<b>4 вариант</b> Вычислить определитель по третьему столбцу
$\begin{vmatrix} -9 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ Вычислить определитель по правилу треугольника	$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ -6 & -6 & 2 \end{vmatrix}$ Вычислить определитель по правилу треугольника

$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -9 \\ 6 & -6 & 6 \\ 8 & -9 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -9 & -7 & -9 \\ 5 & -8 & 6 \\ 9 & -6 & -4 \end{vmatrix}$
<b>5 вариант</b> Вычислить определитель по правилу треугольника	<b>6 вариант</b> Вычислить определитель по правилу треугольника
$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 7 & -2 & 6 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix}$ <p>Вычислить определитель по второй строке</p> $\begin{vmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 9 & 4 & 7 \\ -6 & -7 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ <p>Вычислить определитель по второму столбцу</p> $\begin{vmatrix} -8 & -7 & -11 \\ 6 & -9 & 5 \\ -7 & 8 & -7 \end{vmatrix}$
<b>7 вариант</b> Вычислить определитель по второй строке	<b>8 вариант</b> Вычислить определитель по второму столбцу
$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -9 \\ 4 & -3 & 6 \\ -2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ <p>Вычислить определитель по правилу треугольника</p> $\begin{vmatrix} 8 & -8 & -9 \\ -7 & 6 & 3 \\ -4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 8 & -6 & 4 \\ -7 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ <p>Вычислить определитель по правилу треугольника</p> $\begin{vmatrix} -9 & -2 & -9 \\ 5 & -8 & 5 \\ -2 & 7 & -6 \end{vmatrix}$

### Проверочная работа по теме «СЛАУ»

Решите систему трех линейных уравнений: а) методом Крамера; б) методом Гаусса

1 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 7y + 4z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

2 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 7y + 4z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

3 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = -5 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$$

9 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

10 
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 14 \\ 7x - 3y + 6z = 20 \end{cases}$$

11 
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ -x + 6y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 2x + y + 2z = 1 \\ 4 \quad & \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = \\ -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y + 3z = 1 \\ 5 \quad & \begin{cases} 2x - y + 2z = \\ 6 \end{cases} \\ & x + y + 5z = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x - y - 3z = 0 \\ 6 \quad & \begin{cases} x + 3y - 4z = \\ -11 \end{cases} \\ & 3x + 2y - z = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x - 2y + z = 6 \\ 7 \quad & \begin{cases} x + 3y - 2z = \\ 5 \end{cases} \\ & 3x - y + 4z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + y + z = 7 \\ 8 \quad & \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + y + 3z = 9 \\ 12 \quad & \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 5y - 2z = 5 \\ 13 \quad & \begin{cases} 7x - 3y - 4z = \\ -9 \end{cases} \\ & 5x - y + 2z = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x + 3y - 8z = -1 \\ 14 \quad & \begin{cases} x - 6y + 2z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = \\ 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x + 2y - 5z = \\ 15 \quad & \begin{cases} -1 \\ 2x - y + 3z = \\ 13 \end{cases} \\ & x + 2y - z = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -x + y + z = 2 \\ 16 \quad & \begin{cases} x - y + z = 8 \\ x + y - z = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

### Проверочная работа по теме «Векторы и действия с ними»

#### Вариант 1

1. Вычислить скалярное произведение векторов  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $\vec{a} = (0; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 1)$ .
2. Определить, при каких значениях  $m$  длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будут равны, если  $\vec{a} = (2m; 2)$ ,  $\vec{b} = (m; 1)$ .
3. Даны точки  $A(-3; 5)$  и  $B(2; -4)$ . Выразить вектор  $\overrightarrow{AB}$  через орты  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ .
4. Найти угол между векторами  $\vec{a} = (1; 0)$  и  $\vec{b} = (1; -1)$ .

#### Вариант 2

1. Вычислить скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AB}$ , если даны координаты точек:  $A(1; 3)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(3; -4)$ .
2. Найти длину вектора  $\vec{p} - \vec{q}$ , если даны векторы  $\vec{p} = (2; 6)$  и  $\vec{q} = (4; 3)$ .
3. Вектор  $\vec{m}$  коллинеарен вектору  $\vec{n} = (1; -3)$ . Найти абсциссу вектора  $\vec{m}$ , если его ордината  $y = 15$ .
4. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 0)$  и  $\vec{b} = (-3; 4)$ . Найти вектор

#### Вариант 3

1. Определить, при каких значениях  $m$  векторы  $\vec{a} = (m; 2)$  и  $\vec{b} = (2; m - 6)$  будут взаимно перпендикулярны.



- На векторах  $\vec{a} = (2; 2)$  и  $\vec{b} = (4; 0)$  построен параллелограмм. Определить длины его диагоналей.
- На плоскости даны точки  $A(3;2)$  и  $B(5;0)$ . Построить вектор  $\vec{OA} + \vec{OB}$  и выразить его через орты  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ .
- Определить угол между векторами  $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}$ .

#### Вариант 4

- Вычислить работу на участке  $\vec{AB}$ , которую производит сила  $\vec{F}$ , если  $|\vec{AB}| = 8$ ,  $|\vec{F}| = 4$ ,  $(\vec{F}; \vec{AB}) = 30^\circ$ .
- Вектор  $\vec{a}$  коллинеарен вектору  $\vec{b} = (3; 2)$ . Вычислить ординату вектора  $\vec{a}$ , если его абсцисса равна -18.
- Определить значение  $m$ , при котором векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будут взаимно перпендикулярны, если дано:  $\vec{a} = (2; m)$  и  $\vec{b} = (4; -1)$ .
- В Треугольнике ABC вершины имеют координаты  $A(1;1)$ ,  $B(2;3)$ ,  $C(3;2)$ . Определить острый угол между медианой [BD] и стороной [BC].

Ответы:

Вариант 1: 1. -8. 2. 0. 3.  $5\vec{i} - 9\vec{j}$ . 4.  $\pi/4$ .

Вариант 2: 1.23. 2.  $\sqrt{13}$ . 3. -5. 4. (18; -16).

Вариант 3: 1. 3. 2.  $2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{10}$ . 3.  $8\vec{i} + 2\vec{j}$ . 4.  $\pi/4$ .

Вариант 4: 1.  $16\sqrt{3}$ . 2. -12. 3. 8. 4.  $\pi/4$ .

#### Задания на действия над векторами в координатной форме

- Найти длину вектора  $\vec{m} = (\vec{a} - 2\vec{b}) - (3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b})$ , если  $\vec{a} = (0; 1; 2)$ ;  $\vec{b} = (2; 4; 6)$ .
- Найти координаты векторного произведения  $\vec{a} \cdot 2\vec{b}$ , если  $\vec{a} = \{0; 1; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{2; 3; 0\}$ .
- В параллелограмме OACB  $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . Вычислить длины его диагоналей.
- Имеет ли треугольник с вершинами  $A(0;5;0)$ ,  $B(4;3;-8)$ ,  $C(-1;-3;-6)$  тупой угол?
- Найти длину вектора  $\vec{m} = (3\vec{a} - 2\vec{b}) - (5\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b})$ , если  $\vec{a} = (0;-1;2)$ ,  $\vec{b} = (-2;4;6)$ .
- Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (0;3;1)$  и  $\vec{b} = (2;1;-1)$ .
- Найти скалярное произведение  $[\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})]$ , если  $\vec{a} = (1;2;-1)$ ,  $\vec{b} = (0;1;2)$ .
- Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ .
- Доказать, что  $\triangle ABC$  равнобедренный, если  $A(4;20)$ ,  $B(10;-2;3)$ ,  $C(-2;0;6)$ .
- Найти скалярное произведение  $[\vec{m}(\frac{1}{2}\vec{n} - \vec{m})]$ , если  $\vec{m} = (2;0;3)$ ,  $\vec{n} = (4;2;4)$ .
- Найти площадь треугольника, если  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;3;4)$ ,  $C(4;3;2)$ .
- Найти длину вектора  $\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $\vec{a} = (0;1;2)$ ,  $\vec{b} = (3;0;1)$ .
- При каком значении  $n$  векторы  $\vec{a} = (-2n; 2n + 2; -2)$  и  $\vec{b} = (3; -4; 1)$  коллинеарны?

14. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 0; -4)$  и  $\vec{b} = (-2; 3; -1)$ . Найти длину вектора  $0,5\vec{a} - \vec{b}$ .
15. Известно, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны и  $\vec{a} = \{1; -2; 4\}$ ,  $\vec{b} = \{8; y; z\}$ . Найти известные координаты вектора  $\vec{b}$ .
16. Найти сумму 2 векторов  $\vec{a} = \{2; -1; 4\}$  и  $\vec{b} = \{3; 6; -1\}$ .
17. Дан вектор  $\vec{r} = \{-3; 1; 4\}$ . Найти координаты вектора  $3\vec{r}$ .
18. Найти длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(3; -2; 1)$ .
19. Найти проекцию вектора  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$  на  $\vec{b} = \{3; 0; -1\}$ .
20. Даны векторы  $\vec{a} = \{1; 3; -2\}$  и  $\vec{b} = \{2; -1; z\}$ . Найти координату  $z$ , если известно, что  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
21. Доказать, что треугольник с вершинами  $A(2; 1; 5)$ ,  $B(-1; 0; 3)$ ,  $C(5; -1; 4)$  равнобедренный.
22. Найти координаты точки  $M$ , лежащей на оси  $Oy$ , если эта точка равноудалена от точек  $A(1; -1; 2)$  и  $B(4; 0; 3)$ .
23. Найти угол между векторами  $\vec{a} = \{1; \sqrt{10}; 3\}$  и  $\vec{b} = \{3; \sqrt{10}; -1\}$ .
24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \{1; 2; -3\}$  и  $\vec{b} = \{2; -1; \sqrt{2}\}$ .
25. Найти длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(3; 2; 0)$ .

#### Проверочная работа по теме «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Выполнить указанное задание по индивидуальному варианту:

Даны вершины  $A(X_1; Y_1)$ ,  $B(X_2; Y_2)$ ,  $C(X_3; Y_3)$  треугольника  $ABC$ .

Требуется найти:

- а) уравнение стороны  $AC$
- б) уравнение высоты, проведенной из вершины  $B$
- в) длину высоты, проведенной из вершины  $A$
- г) величина (в радианах) угла  $B$
- д) уравнение биссектрисы угла  $B$

1.  $A(5; 3)$ ,  $B(-11; -9)$ ,  $C(-4; 15)$ .

2.  $A(-7; 2)$ ,  $B(5; -3)$ ,  $C(8; 1)$ .

3.  $A(1; -15)$ ,  $B(6; -3)$ ,  $C(2; 0)$ .

4.  $A(-8; 3)$ ,  $B(4; -2)$ ,  $C(7; 2)$ .

5.  $A(6; 3)$ ,  $B(-10; -9)$ ,  $C(-3; 15)$ .

6.  $A(-9; 6)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(6; 5)$ .

7.  $A(20; 5)$ ,  $B(-4; 12)$ ,  $C(-8; 9)$ .

8.  $A(-3; -7)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $C(-2; 8)$ .

9.  $A(10; 1)$ ,  $B(-6; 13)$ ,  $C(1; 6)$ .

10.  $A(0; -9)$ ,  $B(5; 3)$ ,  $C(1; -11)$

2. По каноническому уравнению кривой второго порядка определить тип кривой.

#### Варианты заданий:

1.  $x^2 - 2x - 4y + y^2 + 1 = 0$

2.  $25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 311 = 0$

3.  $9y^2 - 4x^2 + 16x + 18y + 29 = 0$

4.  $x^2 + 4x - 6y + y^2 + 12 = 0$

5.  $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$
6.  $2x^2 - 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$
7.  $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$
8.  $2x^2 + 5y^2 - 10y - 8x + 3 = 0$
9.  $x^2 - y^2 - 4y = 0$
10.  $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$
11.  $x^2 + 6x + 2y^2 + 12y + 23 = 0$
12.  $3x^2 - 6x - 5y^2 + 20y - 32 = 0$
13.  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
14.  $7x^2 + 3y^2 - 14x + 6y - 11 = 0$
15.  $3y^2 - 6y - 6x^2 + 24x - 3 = 0$
16.  $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$
17.  $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$
18.  $x^2 - 2x - y^2 - 3 = 0$
19.  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
20.  $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$

### 3.3 Практические задания

#### Практическая работа № 1

##### Тема 1: Основы теории комплексных чисел

###### Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):

Решение систем уравнений в поле  $\mathbb{C}$

Полярная система координат, истории возникновения

Области применения комплексных чисел

Применение метода комплексных чисел для решения прикладных задач по специальности

###### Комплексные числа

Решение задач на множестве комплексных чисел. Решение систем уравнений в поле  $\mathbb{C}$ . Полярная система координат, истории возникновения. Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Формула Муавра.

**Цели и задачи:** получить навыки выполнения операций над комплексными числами; закрепить теоретические знания и практические умения.

###### 1. Краткие теоретические сведения.

1

Квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел, добавляя к нему новые числа. Эти новые числа вместе с действительными числами образуют множество, которое называют множеством **комплексных чисел**.

2

**Комплексным числом** называется выражение вида  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  - действительные числа,  $i$  - мнимая единица.  $i^2 = -1$ .

Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  равны, если  $x_1 = x_2$ ;  $y_1 = y_2$ . Комплексное число  $z = x + iy$  равно нулю если  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Понятия «больше», «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

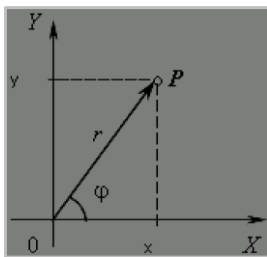
Два комплексных числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ , отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

Всякое комплексное число  $z = x + iy$  можно изобразить точкой  $P(x; y)$  плоскости  $Oxy$ , такой, что  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  (см. рис.1)

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат - мнимой.

Комплексное число  $z = x + iy$  можно изображать и с помощью радиус-вектора  $\underline{r} = \underline{OP} = (x, y)$ .

Длина вектора  $\underline{r}$ , изображающего комплексное число  $z$  называется модулем этого числа и обозначается  $|z|$  или  $r$ . Модуль  $r = |z|$  однозначно определяется по формуле  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Аргумент комплексного числа - это угол  $\varphi$  между осью  $OX$  и вектором  $OP$ , изображающим это комплексное число. Обозначается  $\operatorname{Arg} z$

Сложение комплексных чисел.

Суммой двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число, определяемое равенством  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Правило нахождения суммы комплексных чисел в геометрической форме (см. рис.2).

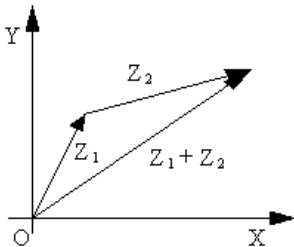


Рисунок 2

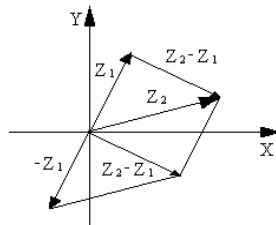


Рисунок 3

Вычитание комплексных чисел.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Разностью двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число, определяемое равенством  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ .

Правило нахождения разности комплексных чисел в геометрической форме (см. рис.3).

Умножение комплексных чисел.

Произведением комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число, определяемое равенством  $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Деление комплексных чисел.

Деление комплексных чисел определяется как действие обратное умножению. Частным двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  ( $z_2 \neq 0$ ) называется комплексное число  $z$ , которое, будучи умноженным на  $z_2$ , дает число  $z_1$ .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Все арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме проводятся по правилам действий над многочленами.

Запись числа комплексного числа  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  в виде называется тригонометрической формой, где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\phi$  - аргумент комплексного числа.

Аргумент  $\phi$  определяется из формул  $\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Аргумент  $z$  можно найти, используя

формулу  $\tan \phi = \frac{y}{x}$ , так как  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , то из формулы  $\tan \phi = \frac{y}{x}$  находим

$$\arctg \frac{y}{x} \text{ для внутренних точек } I, IV \text{ четвертей } \phi = \arg z = \arctg \frac{y}{x} \\ - \pi \text{ для внутренних точек } III \text{ четверти } \phi = \arg z = \{ \{$$

Запись комплексного числа в виде  $z = re^{i\phi}$  называется показательной формой комплексного числа.

Умножение комплексных чисел.

При умножении комплексных чисел представленных в тригонометрической или показательной форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Пусть  $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) = re^{i\phi}$ ,  $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = re^{i\phi}$ . Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

Деление комплексных чисел.

При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Возведение в степень. Формула Муавра.

$$z^n = (r(\cos \phi + i \sin \phi))^n = r^n (\cos(n \cdot \phi) + i \sin(n \cdot \phi))$$

Извлечение корня.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \phi + i \sin \phi)} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi k}{n})$$

где  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Формула Эйлера  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ .

## 2. Примеры выполнения заданий

**Пример:** Найти сумму и произведение комплексных чисел  $z_1 = 2 - 3i$  и  $z_2 = -7 + 8i$ .

**Решение:**  $z_1 + z_2 = 2 - 7 + (-3 + 8)i = -5 + 5i$

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-7 + 8i) = -14 + 16i + 21i + 24 = 10 + 37i$  (см. рис. 4).

**Пример:** Найти сумму и произведение комплексных чисел  $z_1 = 1 + 2i$  и  $z_2 = 2 - i$ .

**Решение:**  $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = (1 + 2) + i(2 + (-1)) = 3 + iz_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot i^2 + i(2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)) = 2 + 2 + i(4 - 1) = 4 + 3i$

**Пример:** Даны комплексные числа  $z_1 = 4 + 5i$  и  $z_2 = 3 + 4i$ . Найти разность  $z_2 - z_1$  и частное  $\frac{z_2}{z_1}$

**Решение:**  $z_2 - z_1 = (3 + 4i) - (4 + 5i) = -1 - i$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4 - 3 + 5i - 4}{16 + 25} + i \frac{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 32}{16 + 25} + \frac{1}{41}i$$

**Пример:** Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число  $z = 3 + i\sqrt{3}$ .

**Решение:**

1. Находим модуль комплексного числа

$$|z| = r = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

2. Находим главное значение аргумента комплексного числа  $z$ :

Так как вектор, изображающий число  $z$  лежит в I четверти и  $tg \phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , то  $\phi = \frac{\pi}{6}$ .

3. Находим тригонометрическую форму:  $z = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ .

4. Находим показательную форму:  $z = 2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

## 4. Варианты заданий контрольной работы

### Вариант № 1

1. Дано комплексное число  $z = 21 - 4i$ . Записать число равное, противоположное, сопряженное исходному.
2. Выполнить действие  $z = (3 - 2i) + (-6 - 2i)$
3. Выполнить умножение  $z = (3 + 4i)(1 + 3i)$
4. Выполнить деление  $z = (-6 + 2i) : (3 - 4i)$
5. Выполнить действия  $z = (5 + 2i) : (2 - 5i) + (7 + 3i) : (1 - 2i)$
6. Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

$$1-i; -2+2i; \sqrt{3}-i; -\sqrt{3}+\sqrt{2}i; -3+2i.$$

### Вариант № 2

1. Дано комплексное число  $z = 3 + 9i$ . Записать число равное, противоположное, сопряженное исходному.
2. Выполнить действие  $z = (5 + 3i) + (-2 - 5i)$ .
3. Выполнить умножение  $z = (-2 + 3i)(-1 - 6i)$
4. Выполнить деление  $z = (4 + 3i) : (-2 - 5i)$
5. Выполнить действия  $z = (-1 + 3i) : (5 + i) - (3 - 4i) : (4 + 3i)$ .
6. Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

$$-1-i; -2-i; -\sqrt{3}+i; \sqrt{6}\sqrt{3}i; 5-2i.$$

#### **Анализ и оценка выполненной работы.**

**Критерии оценивания:** за каждый правильный ответ дается по 1 баллу; максимальное количество баллов 6.

5-6 баллов – отметка «5» (отлично);

4 балла – отметка «4» (хорошо);

3- балла – отметка «3» (удовлетворительно);

менее 3 баллов – отметка «2» (неудовлетворительно)

#### **Вопросы для устного опроса по теме «Комплексные числа»**

ОК2, ОК3, ОК6, З-1, З-2

1. Дать определение комплексного числа.
2. Сформулировать определение мнимой единицы.
3. Как найти степень мнимой единицы?
4. Какие комплексные числа называют равными, сопряженными?
5. Дать определение суммы двух комплексных чисел.
6. Дать определение произведения двух комплексных чисел.
7. Дать определение частного двух комплексных чисел.
8. Как изображаются комплексные числа на координатной плоскости?
9. Дать определение модуля и аргумента комплексного числа.
10. Записать общий вид комплексного числа в тригонометрической форме.
11. Как возвести в степень комплексное число в тригонометрической форме?
12. Записать общий вид комплексного числа в показательной форме.
13. Как осуществить переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной форме?
14. Как перемножить два комплексного числа в показательной форме?
15. Как разделить два комплексного числа в показательной форме?
16. Как возвести в степень комплексное число в показательной форме?
17. Как найти все значения корня  $n$ -й степени из комплексного числа в показательной форме?

### **Практическая работа № 2**

#### **Тема 2. Теория пределов**

#### **Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):**

Развитие теории пределов

Замечательные пределы

Предел функции на языке эпсилон-дельта

Бесконечно большие функции

#### **Числовая последовательность и ее предел. Предел функции в точке.**

## Два замечательных предела.

**Цели и задачи работы:** научиться применять теоретические знания вычисления пределов и использовать формулы первого и второго замечательных пределов к решению упражнений.

### 1. Краткие теоретические сведения.

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции*  $y=f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$  (в точке  $x_0$ ), если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , как только  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

**Обозначение:**  $f(x) = A$ .

**Определение.** Функция  $y=f(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x$ , стремящемся к  $x_0$  (в точке  $x_0$ ), если  $f(x) = 0$ .

**Определение.** Функция  $y=f(x)$  называется *бесконечно большой* при  $x$ , стремящемся к  $x_0$  (в точке  $x_0$ ), если для любого положительного числа  $M$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что  $|f(x)| > M$ , как только  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

**Обозначение:**  $f(x) = \infty$ .

**Определение.** Функция  $y=f(x)$ , заданная на всей числовой прямой, называется *бесконечно большой* при  $x$ , стремящемся к  $\infty$ , если для любого положительного числа  $M$  найдется такое положительное число  $T$ , что  $|f(x)| > M$ , как только  $|x| > T$ .

**Обозначение:**  $f(x) = \infty$ .

#### Основные теоремы о пределах:

$$1 \ (f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x).$$

$$2 \ (f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g(x).$$

$$3 \ k f(x) = k f(x).$$

$$4 \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

В простейших случаях вычисление предела функции сводится к подстановке в функцию, стоящую под знаком предела, предельного значения аргумента. Но довольно часто такая подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным значениям вида:  $\left(\frac{0}{0}\right)$ ,  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ,  $(0 \cdot \infty)$ ,  $(\infty - \infty)$ ,  $(1^\infty)$ ,  $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ . Отыскание предела в этих случаях, называют раскрытием неопределенностей. Для раскрытия неопределенностей преобразуют выражение, стоящее под знаком предела, затем используют теоремы о пределах, замечательные пределы.

**Первый замечательный предел:**  $\frac{\sin x}{x} = 1$ ,

следствия  $\frac{x}{\sin x} = 1$ ,  $\frac{\arcsin x}{x} = 1$ ,  $\frac{x}{\arcsin x} = 1$ .

**Второй замечательный предел:**  $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$  или  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

### 2. Примеры выполнения работы

**Пример 1.** Вычислить  $(2x - 1)$ .

Решение. Подставляем в функцию  $y = 2x - 1$  предельное значения аргумента  $x=3$ , получим  $(2x - 1) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ .

Ответ: 5.

**Пример 2.** Вычислить  $\frac{x^2 - 10x - 11}{x^2 - 1}$ .



Решение. Подставляем в функцию  $y = \frac{x^2-10x-11}{x^2-1}$  предельное значения аргумента  $x=-1$ , получим  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, используя формулы сокращенного умножения, правило разложения квадратного трехчлена на множители ( $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ), где  $x_1, x_2$  - корни квадратного трехчлена), метод группировки. Решение записывают в виде:

$$\frac{x^2 - 10x - 11}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 11)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 11)}{(x - 1)} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Сокращение на  $(x+1)$  возможно, так как оно не равно нулю, а лишь стремится к нулю.

Ответ: 6.

**Пример 3.** Вычислить  $\frac{3-\sqrt{5+x}}{x^2-16}$ .

Решение. Подставляем в функцию  $y = \frac{3-\sqrt{5+x}}{x^2-16}$  предельное значения аргумента  $x=4$ , получим  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Чтобы избавиться от неопределенности, надо функцию умножить на единицу, представив ее в виде дроби, сопряженной к выражению, содержащему корень  $3 - \sqrt{5+x}$ . Запишем решение

$$\begin{aligned} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{x^2 - 16} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{3 - \sqrt{5+x}}{x^2 - 16} \cdot \frac{3 + \sqrt{5+x}}{3 + \sqrt{5+x}} = \\ &= \frac{3^2 - \sqrt{5+x}^2}{(x^2 - 16)(3 + \sqrt{5+x})} = \frac{4 - x}{(x - 4)(x + 4)(3 + \sqrt{5+x})} = \\ &= \frac{-1}{(x + 4)(3 + \sqrt{5+x})} = \frac{-1}{8 \cdot 6} = -\frac{1}{48} \end{aligned}$$

Ответ: -1/48.

**Пример 4.** Вычислить  $\frac{2x^2+x+3}{x^3-16x+1}$ .

Решение. Подставляем в функцию  $y = \frac{2x^2+x+3}{x^3-16x+1}$  предельное значения аргумента  $x \rightarrow \infty$ , получим  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . Чтобы избавиться от неопределенности, надо в числителе и знаменателе вынести множитель, содержащий максимальную степень переменной. Запишем решение

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x + 3}{x^3 - 16x + 1} &= \frac{x^3 \left( \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^3 \left( \frac{x^3}{x^3} - \frac{16x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{16}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

**Пример 5.** Вычислить  $\frac{x^5+7}{4x^3+2x+8}$ .

Решение. Подставляем в функцию  $y = \frac{x^5+7}{4x^3+2x+8}$  предельное значения аргумента  $x \rightarrow \infty$ , получим  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . Чтобы избавиться от неопределенности, надо в числителе и знаменателе вынести множитель, содержащий максимальную степень переменной. Запишем решение

$$\frac{x^5 + 7}{4x^3 + 2x + 8} = \frac{x^5 \left( \frac{x^5}{x^5} + \frac{7}{x^5} \right)}{x^5 \left( \frac{x^3}{x^5} + \frac{2x}{x^5} + \frac{8}{x^5} \right)} =$$

$$= \frac{1 + \frac{7}{x^5}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} + \frac{8}{x^5}} = \frac{1 + 0}{0 + 0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ответ:  $\infty$ .

**Определение.** Функция  $y=f(x)$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если она определена в этой точке и существует конечный предел функции в этой точке, равный значению функции в этой точке:  $f(x) = f(x_0)$ . Точка, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва*.

Если функция  $y=f(x)$  непрерывна в каждой точке интервала  $(a, b)$ , то она непрерывна на этом интервале (Рисунок 1).

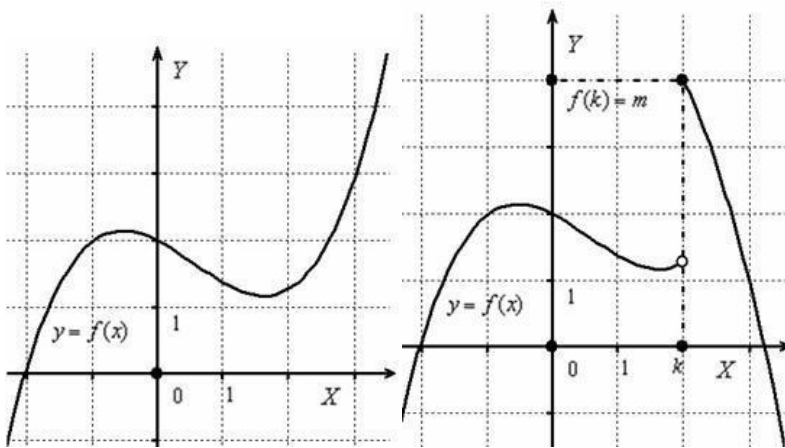


Рисунок 1. Графики непрерывной и разрывной функций

**Пример 6.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \leq 0, \\ 2x + 1 & \text{при } 0 < x < 2, \\ x - 2 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

и выполним её чертёж.

Строим график:

- 1) на полуинтервале  $(-\infty; 0]$  чертим фрагмент параболы  $f(x) = x^2 + 1$ ,
- 2) на интервале  $(0; 2)$  — отрезок прямой  $f(x) = 1 + 2x$ ,
- 3) на полуинтервале  $[2; +\infty)$  — прямую  $f(x) = x - 2$ .

При этом в силу неравенства  $x \leq 0$  значение  $f(0)$  определено для квадратичной функции  $f(x) = x^2 + 1$ , и в силу неравенства  $x \geq 2$ , значение  $f(2)$  определено для линейной функции  $f(x) = x - 2$  (Рисунок 2).

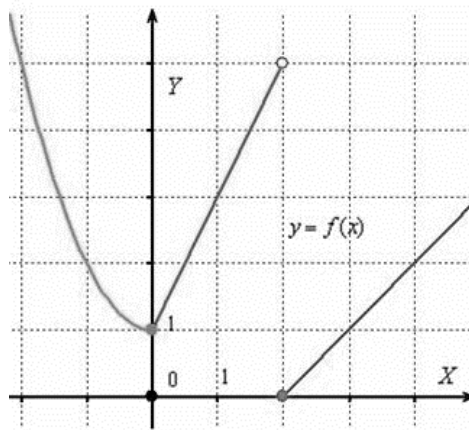


Рисунок 2. График функции примера 6.

**Пример 7.** Исследовать функцию на непрерывность  $y = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ .

Решение. Преобразуем функцию  $y = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ ,  $y = \frac{x^2(x - 1)}{x - 1}$ .

Область определения функции:  $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Построим график функции после упрощения дроби  $y = x^2$  при  $x \neq 1$  (Рисунок 3).

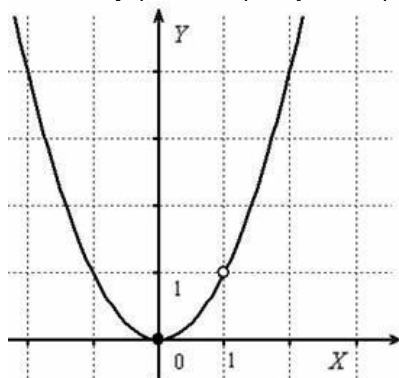


Рисунок 3. График функции примера 7.

Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки  $x = 1$ , в которой она терпит разрыв.

# Задания на пределы

## Вариант 1

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 7}{7x^2 - 1}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + x^4}{x^5 - x + 4}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 5}{5x^5 + x^3 + 5}$

7.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 6x - 16}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x + 4x - 5}$

## Вариант 2

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 25} - 5}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 16} - 4}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 49} - 7}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3x + 1} - 1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 - \sqrt{x + 9}}$  ✓

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{10 - \sqrt{x + 100}}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{\sin x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{3x}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 3x}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x$

## Вариант 3

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{0.5x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2.5x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{4/x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{3/x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + 2x}{\sqrt{x} - 2}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x - 1}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2 + x}\right)^{3x}$

□

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 9}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{2x - 6}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sin 4x}.$$

4. Вычислить предел функции:  $\left(1 + \frac{15}{x}\right)^{\frac{x}{5}}$

**Анализ и оценка выполненной работы.**

**Критерии оценивания:**

«отлично» - верно выполнено 4 задания;

«хорошо» - верно выполнено 3 задания;

«удовлетворительно» - верно выполнено 2 задания;

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 2 заданий.

**Вопросы для устного опроса по теме «Теория пределов»**

ОК2, ОК3, ОК6, З-1, З-2

1. Дайте определение предела в точке. (З-1, З-2)
2. Объясните раскрытие неопределенности  $\frac{0}{0}$ . (ОК3, З-1, З-2)
3. Дайте определение предела функции на бесконечности.
4. Объясните основной метод раскрытия неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$ . (З-1, З-2)
5. Сформулируйте теоремы о пределах.
6. Сформулируйте и напишите первый и второй замечательные пределы. (З-1, З-2)

### Практическая работа № 3

**Тема 3: Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной**

**Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):**

Производные и дифференциалы высших порядков

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел

Приложения определенного интеграла к решению задач специальности

Интегрирование функции, содержащих квадратный трехчлен

Поверхность тела вращения

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Задачи на составление дифференциальных уравнений

Уравнение Бернулли

Составление уравнений касательной и нормали

## Дифференциальное исчисление функции

Раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Составление уравнений касательной и нормали. Логарифмическое дифференцирование. Исследование функций с помощью первой и второй производных и построение графиков различных функций.

**Цели и задачи:** получить навыки раскрытия неопределенностей с помощью правила Лопиталя; получить навыки вычисления приближенных значений функций с помощью дифференциала; выработать навык составления уравнений касательной и нормали; получить навыки применения производной при исследовании функций; закрепить теоретические знания и практические умения.

### 1. Краткие теоретические сведения

Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов функций.

Правило Лопиталя представляет собой метод вычисления пределов, имеющих неопределенность типа  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Пусть  $a$  является некоторым конечным действительным числом или равно бесконечности.

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то аналогично  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой-либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Неопределенности вида  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида  $y = [f(x)]^{g(x)}$ ,  $f(x) > 0$  вблизи точки  $a$  при  $x \rightarrow a$ . Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ .

Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  – это главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента  $\Delta x$ . Обозначается  $dy = y' \Delta x$ . Дифференциал независимой переменной  $x$  равен ее приращению  $dx = \Delta x$ . Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента  $dy = y' dx$ .

Правила вычисления дифференциалов.

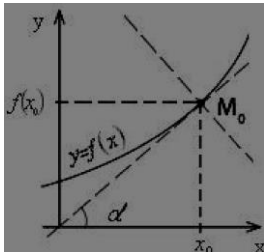
Пусть  $U$  и  $V$  – дифференцируемые функции, тогда

$$\begin{aligned} d(U \pm V) &= dU \pm dV \\ d(U \cdot V) &= V \cdot dU + U \cdot dV \\ d(c \cdot U) &= c \cdot dU, c = \text{const} \\ d\left(\frac{U}{V}\right) &= \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2} \end{aligned}$$

Основная формула в приближенных вычислениях

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Составление уравнений касательной и нормали.



Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке (см.рис.5).

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0; f(x_0))$  имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания  $M(x_0; f(x_0))$ , называется *нормалью* к кривой.

Уравнение нормали к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0; f(x_0))$  имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Если  $f'(x_0) = 0$  (т.е. касательная горизонтальная), то нормаль вертикальна и имеет уравнение  $x = x_0$ .

#### Общая схема исследования функций с помощью производной

1. Нахождение области определения функции.
  2. Проверка того, является ли функция четной, нечетной, периодической или эта функция – функция общего вида.
  3. Определение точек пересечения с осями координат.
  4. Нахождение промежутков монотонности функции и точек экстремума.
  5. Определение промежутков знакопостоянства функции.
  6. Исследование функции на выпуклость, вогнутость, определение точек перегиба (исследование проводится по второй производной функции).
  7. Нахождение асимптот функции.
  8. Уточнение графика функции по точкам (произвести окончательное уточнение графика, в особенности на участках, где информация о нем недостаточна).
- Данную схему можно варьировать в зависимости от конкретных особенностей функции, переставлять отдельные этапы, некоторые из них опускать, какие-то, наоборот, добавлять.

#### 2. Примеры выполнения заданий

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$ .

**Решение:** Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e}$$

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{Arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$ .

**Решение:**

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{Arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\pi - 2 \operatorname{Arctg} x)'}{(e^{\frac{3}{x}} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{\frac{3}{x^2} e^{\frac{3}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$$

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(xe^{\frac{x}{2}})'}{(x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x)}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x)}{1 + e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x))'}{(1 + e^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + x}{4e^{\frac{x}{2}}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4 + x)'}{(4e^{\frac{x}{2}})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
- \lim_{x \rightarrow 0^+} x > 0 &> x > 0 > x > 0 > x > 0 > x > 0 > x > 0 > x > 0 > x > 0 \\
&\quad 0 \quad \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0.
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \lim x \rightarrow 0 x > 0 \lim x \rightarrow 0 x > 0 x \rightarrow 0 x > 0 x \rightarrow 0 x > 0 \quad \ln y &= 0 \\ &\Rightarrow \lim y = 1 \\ &= \lim x^x = 1 \end{aligned}$$
$$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; x_0 = 1; \Delta x = 0,006; f(x_0) = 1; f'(x_0) = \frac{1}{2}.$$
$$f(x_0) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \{f'(x_0) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

**Решение:**



Область определения функции  $x \in (-\infty; -1), (-1; 1), (1 + \infty)$ .

Функция  $y = \frac{x}{1-x^2}$  является нечетной т.к.  $y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$ . Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при  $x \geq 0$ .

Точки пересечения с осями координат  $x = 0, y(0) = 0$

Точка  $(0;0)$  - точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

Найдем промежутки монотонности функции и точки экстремума.

$$y' = \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}$$

Так как  $y' > 0$  в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

Т.к.  $y' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$ , то критическими точками является точки  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 1$ .

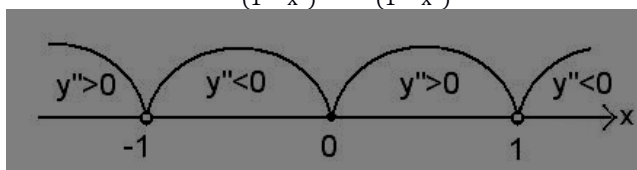
Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

Функция знакоположительна ( $y > 0$ ) в интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ , знакоотрицательна – в интервалах  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ .

Исследуем функцию на выпуклость и найдем точки перегиба:

Найдем  $y''$

$$y'' = \left( \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка  $(0;0)$  – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ ; выпуклый вниз на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ .

Найдем асимптоты функции:

Прямые  $x = 1$  и  $x = -1$  являются вертикальными асимптотами функции.

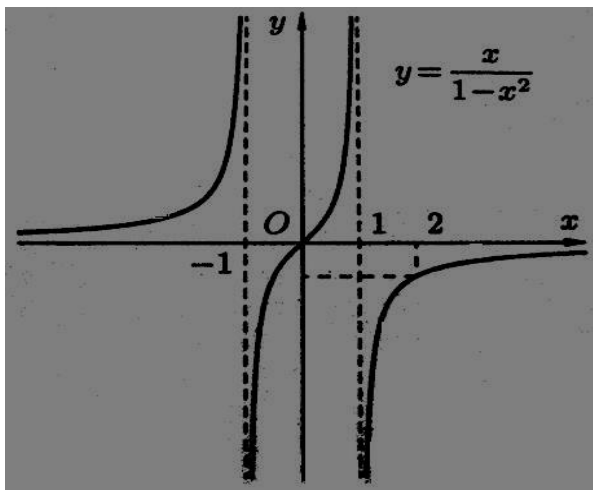
Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение  $y=0$ . Наклонных асимптот нет.

Прямая  $y=0$  является асимптотой и при  $x \rightarrow +\infty$ , и при  $x \rightarrow -\infty$ .

Проведенного исследования достаточно для построения графика функции  $y = \frac{x}{1-x^2}$ .



### 3. Задания для контрольной работы

3.1 Вычислите пределы функций, используя правило Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$$

3.2 Найдите пределы функций, не используя правило Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 9x + 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{1-x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \operatorname{tg} x}$$

3.3. Найдите с помощью дифференциала приближенное значение выражений

$$\sqrt[3]{9}$$

$$(1,03)^5$$

$$e^{0,1}$$

$$\cos 61^\circ$$

$$(2,01)^5$$

$$(2,995)^5$$

3.4 Составить уравнения касательной и нормали к функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0; y_0)$ .

$$y = \frac{x+9}{x+3}, M\left(1; \frac{5}{2}\right)$$

$$y = \frac{x^2-3}{x^2}, M\left(2; \frac{1}{4}\right)$$

3.5 Исследовать функцию и построить ее график.

$$y = x^3 - 3x$$

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2$$

$$y = x + 2\sqrt{-x}$$

$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$y = 3x - x^2$$

$$y = \frac{x+5}{x+3}$$

$$y = \frac{6\sqrt{x}}{x+2}$$

$$y = 12x - x^3$$

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

Ответы к заданиям 3.2.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 9x + 10} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{(2x+5)(x-1)}{(2x+5)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{x-1}{x+2} = 7$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{1-x} - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{1-x} + 2)}{(\sqrt{1-x} - 2)(\sqrt{1-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{1-x} + 2)}{-3-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} (3-x)(\sqrt{1-x} + 2) = 24$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \operatorname{tg} x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \cos^2 x)}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$$

#### Анализ и оценка выполненной работы.

**Критерии оценивания:** за каждый правильный ответ даётся по 1 баллу; максимальное количество баллов 28.

23-28 баллов – отметка «5» (отлично);

16-22 баллов – отметка «4» (хорошо);

9-15 баллов – отметка «3» (удовлетворительно);

менее 9 баллов – отметка «2» (неудовлетворительно)

#### Вопросы для устного опроса по теме «Дифференциальное исчисление»

(ОК2, ОК3, ОК4, ОК6, ОК 9, 3-1, 3-2)

1. Что называется, приращением независимой переменной и приращением функции? (3-1, 3-2)
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной. (3-1, 3-2)
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. (3-1, 3-2)
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной? (ОК3, 3-1, 3-2)
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций. (ОК2, ОК3, ОК9, 3-1, 3-2)
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную? (ОК2, ОК4, 3-1, 3-2)
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке? (ОК2, ОК3, 3-1, 3-2)
10. В чем заключается механический смысл производной? (ОК2, ОК3, 3-1, 3-2)
11. Что называется, производной второго порядка и, каков ее механический смысл? (ОК2, ОК3, 3-1, 3-2)

12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл? (ОК2, ОК3, 3-1, 3-2)
13. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций? (ОК2, ОК4, 3-1, 3-2)
14. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной. (ОК2, ОК3, 3-1, 3-2)
15. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений? (ОК2, ОК4, 3-1, 3-2)
16. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
17. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой? (ОК2, ОК4, 3-1, 3-2)
18. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба. (ОК2, ОК4, 3-1, 3-2)
19. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

#### Практическая работа № 4 Тема 4: Интегральное исчисление функции

##### Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):

Интеграл и его применение

Интеграл в древности

Интеграл Римана и Даниэля

Применение интеграла в вычислении площади криволинейной трапеции и объема тел вращения

##### Интегральное исчисление функции (неопределенный и определенный интегралы)

Методы интегрирования отдельных функций. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел.

**Цели и задачи:** получить навыки вычисления интегралов различными методами; получить навыки применения определенного интеграла к вычислению площадей, объемов тел и других величин; закрепить теоретические знания и практические умения.

##### 1. Краткие теоретические сведения

Функция называется первообразной функцией для данной функции на данном промежутке, если на этом промежутке  $F'(x) = f(x)$ .

Выражение  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$  и  $C$  - произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$ .

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

##### Основные свойства неопределенного интеграла

$$1^0 (\int f(x)dx)' = f(x)$$

$$2^0 d \int f(x)dx = f(x)dx$$

$$3^0 \int dx(x) = F(x) + c$$

$$4^0 \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

##### Таблица основных интегралов

$$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1), \text{ в частности,}$$

$$\int du = u + c;$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$$

$$4. \int e^u du = e^u + c;$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + c;$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + c;$$

$$7. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + c;$$

$$8. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + c;$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c;$$

$$\begin{aligned}
10. \int \frac{du}{\sin^2 u} &= -ctgu + c; \\
11. \int \frac{du}{\sin u} &= \ln \left| tg \frac{u}{2} \right| + c; \\
12. \int \frac{du}{\cos u} &= \ln \left| tg \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c; \\
13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \arcsin \frac{u}{a} + c; \\
14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} &= \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c; \\
15. \int \frac{du}{a^2 + u^2} &= \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + c; \\
16. \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c; \\
17. \int \sqrt{a^2 - u^2} du &= \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c; \\
18. \int \sqrt{u^2 + a^2} du &= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c.
\end{aligned}$$

### Основные методы интегрирования

#### Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

#### Примеры:

$$\begin{aligned}
1. \int \frac{d(x)}{x+3} &= \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln |x+3| + c \\
2. \int (4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}) dx &= 4 \int x^3 dx - \frac{5}{2} \int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2} tg x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + c
\end{aligned}$$

#### Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют х на  $\phi(t)$ , где  $\phi(t)$  - непрерывно дифференцируемая функция, полагают  $dx = \phi'(t)dt$  и получают  $\int \phi'(t)dt \text{ rli } \int f(x)dx = \int$ .

#### Примеры:

$$\begin{aligned}
1. \int \cos 3x dx &= |t = 3x| dt = (3x)' dx = 3 dx | dx = \frac{1}{3} dt | = \int \cos t \cdot \frac{1}{3} dt = \sin t + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c \\
\int \sin(7x+8) dx &= |t = 7x+8| dt = 7 dx | dx = \frac{1}{7} dt | = \int \sin t \cdot \frac{1}{7} dt = -\frac{1}{7} \cos t + c \\
&= -\frac{1}{7} \cos(7x+8) + c \\
3. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= |t = 1-x^2| dt = -2x dx | dx = -\frac{dt}{2x} | = -\int \frac{dt}{2 \cdot \sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \\
4. \int (15-3x)^7 dx &= |t = 15-3x| dt = -3 dx | dx = -\frac{1}{3} dt | = \int t^7 (-\frac{1}{3}) dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + c \\
&= -\frac{(15-3x)^8}{24} + c
\end{aligned}$$

#### Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Вид интеграла $P(x)$ - многочлен	Рекомендуемая подстановка	
	$u$	$dv$
$a, b, k$ – некоторые числа		
$\int P(x) \arctg x dx$	$u = \arctg x$	$dv = P(x) dx \quad v = [\text{первообразная } P(x)]$
$\int P(x) \arcsctg x dx$	$u = \arcsctg x$	
$\int P(x) \ln x dx$	$u = \ln x$	



### Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

*Интегрирование подстановкой*

**Теорема.** Пусть для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  от непрерывной функции сделана подстановка  $x=\phi(t)$ . Если:

- 1) функция  $x = \phi(t)$  и её производная  $x' = \phi'(t)$  непрерывны при  $t \in [d; \beta]$ ;
- 2) множеством значений функции  $x = \phi(t)$  при  $t \in [\alpha; \beta]$  является отрезок  $[a; b]$ ;
- 3)  $\phi(\alpha) = a$  и  $\phi(\beta) = b$  то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$$

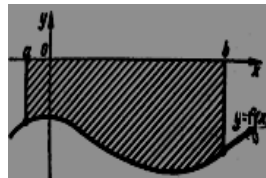
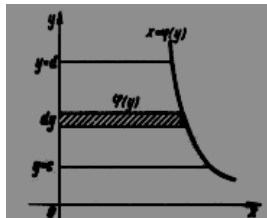
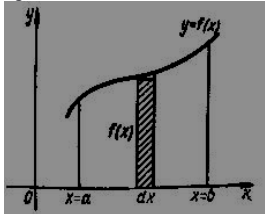
*Интегрирование по частям*

**Теорема.** Если функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a; b]$ , то имеет место формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

### Вычисление площади плоской фигуры

Найдем площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $O_x$  и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , где  $a \leq x \leq b$ ,  $f(x) \geq 0$  (см. рис. 6)



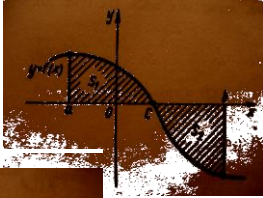
Так дифференциал переменной площади  $S$  есть площадь прямоугольника с основанием  $dx$  и высотой  $f(x)$ , т. е.  $dS = f(x)dx$ , то, интегрируя это равенство в пределах от  $a$  до  $b$ , получим

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси  $O_y$  так, что  $c \leq y \leq d$ ,  $x = \phi(y) \geq 0$  (см. рис. 7), то дифференциал переменной площади  $S$  равен  $dS = \phi(y)dy$ , откуда

$$S = \int_c^d \phi(y)dy$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой  $y = f(x)$ , осью  $O_x$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , лежит под осью  $O_x$  (см. рис. 8), площадь находится по формуле



$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

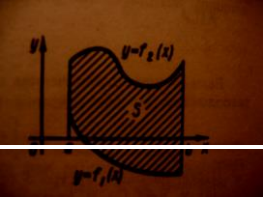
Если фигура, ограниченная кривой  $f(y)$ , осью  $O_x$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , расположена по обе стороны от оси  $O_x$ , то

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b |f(x)| dx \text{ (см. рис. 9)}$$

Рисунок 10

Пусть, наконец, фигура  $S$  ограничена двумя пересекающимися кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , где  $a \leq x \leq b$  и  $f_1(x) \leq f_2(x)$  (см. рис. 10). Тогда ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$



#### Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью  $v = f(t) \geq 0$  за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

#### Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой  $f(x)$  при перемещении по оси  $O_x$  материальной точки от  $x = a$  до  $x = b$ , находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F = kx$$

где  $F$  - сила,  $H$ ;  $x$  - абсолютное удлинение пружины,  $m$ , вызванное силой  $F$ , а  $k$  - коэффициент пропорциональности,  $H/m$ .

#### Вычисление силы давления жидкости

Значение силы  $P$  давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения  $x$  этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления ( $H$ ) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = 9807 \delta S x,$$

где  $\delta$  - плотность жидкости,  $\frac{кг}{м^3}$ ;  $S$  - площадь площадки,  $м^2$ ;  $x$  - глубина погружения площадки,  $м$ .

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения  $P(x)$ .

#### Длина дуги плоской кривой

Пусть плоская кривая  $AB$  (см. рис. 11) задана уравнением  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ , причем  $f(x)$  и  $f'(x)$  - непрерывные функции в промежутке  $a \leq x \leq b$ . Тогда дифференциал  $dl$  длины дуги  $AB$  выражается формулой

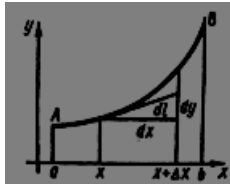
$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \text{ или } dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

а длина дуги  $AB$  вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

где  $a$  и  $b$  - значения независимой переменной  $x$  в точках  $A$  и  $B$ .

Если кривая задана уравнением  $x = \phi(y) (c \leq y \leq d)$ , то длина дуги  $AB$  вычисляется по формуле





$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [\phi'(y)]^2} dy$$

где  $c$  и  $d$  – значения независимой переменной  $y$  в точках  $A$  и  $B$ .

**Пример:** Вычислить  $\int_0^\pi e^x \sin \frac{x}{2} dx$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} u = e^x dx = \sin \frac{x}{2} dx \quad du = e^x dx = -2 \cos \frac{x}{2} \quad \text{rli} \quad |||| \quad \int_0^\pi e^x \sin \frac{x}{2} dx = \\ u = e^x dx = \cos \frac{x}{2} dx \quad du = e^x dx = 2 \sin \frac{x}{2} \quad \text{rli} \\ = -2 \cos \frac{\pi}{2} e^\pi + 2 \cos \frac{0}{2} e^0 + 2(2e^x \sin \frac{x}{2} |_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin \frac{x}{2} dx) \\ = || \quad \int_0^\pi e^x \sin \frac{x}{2} dx = 1 + 2e^\pi \end{aligned}$$

Ответ:  $\int_0^\pi e^x \sin \frac{x}{2} dx = 1 + 2e^\pi$

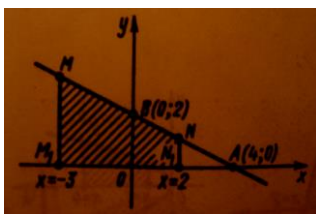


Рисунок 12

В качестве проверки вычислим площадь трапеции  $M_1MNN_1$  обычным путем. Находим:  $M_1M = f(-3) = -0,5(-3) + 2 = 3,5$ ,  $N_1N = f(2) = -0,5 \cdot 2 + 2 = 1$ ,  $M_1N_1 = 5$ . Следовательно,  $S = 0,5(3,5 + 1) \cdot 5 = 11,25$  (кв. ед.).

**Пример:** Скорость движения точки изменяется по закону  $v = (3t^2 + 2t + 1)$  м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

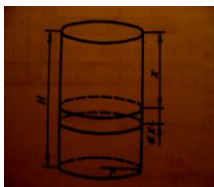
**Решение:** Согласно условию,  $f(t) = 3t^2 + 2t + 1$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 10$ . По формуле  $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$  находим  $S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1) dt = [t^3 + t^2 + t]_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110$  (м).

**Пример:** Сжатие  $x$  винтовой пружины пропорционально приложенной силе  $F$ . Вычислить работу силы  $F$  при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

**Решение:** Так как,  $x = 0,01$  м при  $F = 10$  Н, то, подставляя эти значения в равенство  $F = kx$ , получим  $10 = k \cdot 0,01$ , откуда  $k = 1000$  Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение  $k$ , находим  $F = 1000x$ , т. е.  $f(x) = 1000x$ . Искомую работу найдем по формуле  $A = \int_a^b f(x) dx$ , полагая  $a = 0$ ,  $b = 0,04$ :  $A = \int_0^{0,04} 1000x dx = 500x^2 |_0^{0,04} = 0,8$  (Дж).

**Пример:** Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

**Решение:** Выделим на глубине  $x$  горизонтальный слой высотой  $dx$  (см. рис. 13).



Работа  $A$ , которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом  $P$  на высоту  $x$ , равна  $P_x$ .

Изменение глубины  $x$  на малую величину  $dx$  вызовет изменение объема  $V$  на величину  $dV = \pi r^2 dx$  и изменение веса  $P$  на величину  $dP = 9807\pi r^2 dx$ ; при этом совершаемая работа  $A$  изменится на величину  $dA = 9807\pi r^2 x dx$ .

Проинтегрировав это равенство при изменении  $x$  от 0 до  $H$ , получим  $A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi \cdot 0,25 \cdot 2^2 = 4903\pi$  (Дж).

**Пример:** Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

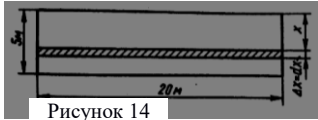


Рисунок 14

**Решение:** На глубине  $x$  выделим горизонтальную полоску шириной  $dx$  (см. рис. 14). Сила давления  $P$  на стенку шлюза есть функция от  $x$ . Изменение глубины  $x$  на малую величину  $dx$  вызовет изменение силы давления  $P$  на малую величину  $\Delta P$ .

Продифференцировав переменную  $P$ , получим приближенное значение (главную часть)  $dP$  приращения  $\Delta P$ .

Находим приближенное значение силы давления воды на эту полоску:  $\Delta P = 9807 \cdot \delta \cdot x \cdot \Delta S = 9807 \cdot x \cdot 20 \cdot \Delta x$ . Но  $dP \approx \Delta P$ . Интегрируя  $dP$  при изменении  $x$  от 0 до 5, получим

$$P = 9807 \cdot 20 \int_0^5 x dx = 9807 \cdot 10x^2 \Big|_0^5 = 2,45(\text{МН}).$$

**Пример:** Найти длину окружности  $x^2 + y^2 = r^2$ .

**Решение:** Дифференцируя уравнение окружности, имеем  $2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ;  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .

По формуле  $L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ , вычислим длину дуги четверти окружности, взяв пределы интегрирования от 0 до  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} dx = \int_0^r \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} dx = \int_0^r \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{y^2}} dx = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r \\ &= \frac{\pi r}{2}. \end{aligned}$$

Длина окружности равна  $C = 4L = 4\left(\frac{\pi r}{2}\right) = 2\pi r$ .

## 2. Задания для самостоятельной (контрольной) работы

2.1 Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

1.  $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$  2.  $\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}) dx$  3.  $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$  4.  $\int (2^x + 3^x) dx$  5.  $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{x^3}) dx$  6.  $\int (\sin x - \frac{e^{-x}}{x^3}) dx$  7.  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$  8.  $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$  9.  $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{4-x^2}\right) dx$  10.  $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx$  11.  $\int \left(\frac{1}{x} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$  12.  $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}\right) dx$  13.  $\int 4x(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}}) dx$  14.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} dx$  15.  $\int \frac{5x^8+1}{x^4} dx$  16.  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$  17.  $\int (\sin \frac{x}{2})^2 dx$  18.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \times \sin 2x} dx$  19.  $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$  20.  $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$  21.  $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$  22.  $\int ctg^2 x dx$  23.  $\int \frac{3tg^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$  24.  $\int (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 dx$  25.  $\int 2^x e^x dx$  26.  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$  27.  $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$  28.  $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx$  29.  $\int \frac{-2x^4 + 4x^2 - 1}{1-x^2} dx$  30.  $\int \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

2.2 Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

1.  $\int \cos 5x dx$  2.  $\int \sin 7x dx$  3.  $\int \sin(3x + 5) dx$  4.  $\int e^{2x} dx$  5.  $\int tg x dx$  6.  $\int e^{-x^2} x dx$  7.  $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx$  8.  $\int \frac{x^4}{x^5 + 7} dx$  9.  $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$  10.  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$  11.  $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx$  12.  $\int \frac{\sqrt{x+\sin x}}{\sqrt{x+\sin x}-1} dx$  13.  $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$  14.  $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x} dx$  15.  $\int \cos^3 x \sin x dx$  16.  $\int \sin^2 x dx$  17.  $\int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx$  18.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  19.  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  20.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  21.  $\int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx$  22.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$  23.  $\int \frac{dx}{2-3\cos x}$  24.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$  25.  $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$  26.  $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$  27.  $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$  28.  $\int (2 + 5x)^9 dx$  29.  $\int \sqrt{2x-5} dx$  30.  $\int \sqrt[3]{3-7x} dx$  31.  $\int \frac{dx}{5x+2}$

2.3 С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

- |                         |                     |                        |                               |                          |                          |                       |                                    |                               |                                   |                                    |   |                                    |   |                     |                                    |                                   |                          |                                    |                        |                       |                            |                           |
|-------------------------|---------------------|------------------------|-------------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|---|------------------------------------|---|---------------------|------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------------------------------|------------------------|-----------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1. $\int x \arctg x dx$ | 12. $\int \ln x dx$ | 18. $\int x \sin x dx$ | 19. $\int (x + 1) \cos 3x dx$ | 20. $\int x^2 \cos x dx$ | 21. $\int x^2 \sin x dx$ | 22. $\int x^2 e^x dx$ | 23. $\int e^x \sin \frac{x}{2} dx$ | 24. $\int (x^3 + 2) \ln x dx$ | 7. $\int (x^2 + 3x + 2) \ln x dx$ | 8. $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$ | 9. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$ | 10. $\int \frac{\arctg x}{x^2} dx$ | 11. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | 12. $\int \ln x dx$ | 13. $\int \frac{x e^{-x} dx}{x^2}$ | 14. $\int \frac{x \ln x dx}{x^6}$ | 15. $\int x^3 e^{-x} dx$ | 16. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ | 17. $\int x \cos x dx$ | 25. $\int \ln^2 x dx$ | 26. $\int \ln(x^2 + 2) dx$ | 27. $\int \cos(\ln x) dx$ |
|-------------------------|---------------------|------------------------|-------------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|---|------------------------------------|---|---------------------|------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------------------------------|------------------------|-----------------------|----------------------------|---------------------------|

2.4 Вычислить определенный интегралы:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\int_a^b x^n dx (n \neq -1)$                             | 14. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} dx$ | 26. $\int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx$                   |
| 2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$                                   | 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$      | 27. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$                       |
| 3. $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$                            | 16. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$                    | 28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$    |
| 4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$                        | 17. $\int_0^2 (3x^2 - 1) dx$                         | 29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$                  |
| 5. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$                               | 18. $\int_1^2 e^x dx$                                | 30. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$               |
| 6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx$ | 19. $\int_0^{\pi} \sin x dx$                         | 31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$       |
| 7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$                        | 20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$               | 32. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$                |
| 8. $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$                                 | 21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$    | 33. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$                |
| 9. $\int_1^e \ln x dx$                                       | 22. $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx$              | 34. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx$ |
| 10. $\int_1^e \ln^2 x dx$                                    | 23. $\int_0^2 x(3-x) dx$                             | 35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$               |
| 11. $\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx$                              | 24. $\int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx$                 | 36. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$                       |
| 12. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$                       | 25. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$            |   |
| 13. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$                         |  |   |

2.5 Задачи на приложение определенного интеграла

- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями  $x-2y+4=0$ ,  $x+y-5=0$ ,  $y=0$ .
- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функцией  $x^2+y^2=r^2$ .
- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями  $7x^2-9y+9=0$ ,  $5x^2-9y+27=0$ .
- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями  $x-y+2=0$ ,  $y=0$ ,  $x=-1$ ,  $x=2$ .
- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями  $2x-3y+6=0$ ,  $y=0$ ,  $x=3$ .
- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями:  $y=2x^2+1$ ,  $y=x^2+10$ .
- Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями  $y=-1.5x^2+9x-7.5$ ,  $y=-x^2+6x-5$ .
- Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v=(6t^2+2t)$  м/с, второе – со скоростью  $v=(4t+5)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5с?
- Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v=(3t^2-6t)$  м/с, второе – со скоростью  $v=(10t+20)$  м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?
- Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v=3t^2$  м/с, второе – со скоростью  $v=(6t^2+10)$  м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10с?
- Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью  $v=(3t^2+4t)$  м/с, второе – со скоростью  $v=(6t+12)$  м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча? При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?
- Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?

13. Цилиндр с подвижным поршнем, площадь поперечного сечения которого  $S$  кв.ед., заполнен газом. Считая, что при увеличении объема газа в цилиндре соблюдается закон Бойля-Мариотта  $pV=k=const$ , вычислить работу, произведенную силой давления газа при увеличении его объема от  $V_0$  до  $V_1$  (температура газа поддерживается постоянной).

14. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы 60Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12 м?

15. В цилиндрическом сосуде объема  $V_0=0,2$  м<sup>3</sup> заключен атмосферный воздух при нормальном давлении  $P_0=1014325$ Н/м<sup>2</sup>. Воздух сжимается поршнем до объема 0,05 м<sup>3</sup>. Какая работа производится при этом, если температура воздуха поддерживается постоянной?

16. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20Н растягивает её на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?

17. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

18. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса  $R=1$ м, высота конуса 2м.

19. Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной 3м, а высота равна 2м, заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.

20. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и высотой 3м заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.

21. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20м и высотой 5м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

22. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) и высотой  $h$ .

23. Треугольная пластина с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислите силу давления воды на пластину.

24. Найти длину дуги параболы  $y=\frac{x^2}{2}$  между точками  $O(0;0)$  и  $A(\sqrt{3};3/2)$ .

25. Найти длину дуги параболы  $y=4-x^2$  между точками её пересечения с осью  $Ox$ .

26. Найти длину дуги параболы  $y^2=x$  между точками  $O(0;0)$  и  $A(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

27. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной параболой  $y=x^2$ ,  $y^2=8x$ .

28. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2=x$ ,  $y=x^2$ .

29. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2=8x$ ,  $y=x^2$ .

30. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого  $a=25$  м, а радиус  $R=20$  м.

31. Вычислите работу, необходимую для выкачивания воды из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м.

#### Анализ и оценка выполненной работы.

##### Критерии оценивания:

85-100% – отметка «5» (отлично);

65-85% – отметка «4» (хорошо);

45-65% – отметка «3» (удовлетворительно);

менее 45% – отметка «2» (неудовлетворительно)

#### Терминологический диктант: «Основы интегрального исчисления»

1. Написать формулу Ньютона-Лейбница.
2. Как называются числа, записанные снизу и сверху от знака интеграла?
3. Какие признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода?
4. Перечислить признаки сходимости несобственных интегралов 2 рода.
5. Каков физический смысл кратных интегралов?
6. Какие геометрические приложения определенного интеграла вы знаете

#### Вопросы для устного опроса по теме «Неопределенный интеграл»

(ОК2, ОК3, ОК6, ОК 9, З-1)

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
4. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
5. Как записать всю совокупность первообразных функций?
6. Что называется, неопределенным интегралом?
7. Почему интеграл называется неопределенным?
8. Что означает постоянная  $C$  в определении неопределенного интеграла?
9. В чем заключается правило интегрирования выражения, содержащего постоянный множитель?
10. В чем заключается правило интегрирования алгебраической суммы функций?
11. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
12. Напишите основные формулы интегрирования.
13. Как проверить результата интегрирования?
14. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

#### Вопросы для устного опроса по теме «Определенный интеграл»

(ОК2, ОК3, ОК6, З-1)

1. Что такое определенный интеграл?
2. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
3. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
4. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

### Практическая работа № 5 Тема 5: Матрицы и определители

#### Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):

Матрицы и определители

Действия над матрицами

Обратная матрица. Ранг матрицы

Применение обратной матрицы в различных областях науки и возможности программирования алгоритма её вычисления

*Матрицы и определители. Действия над матрицами.*

**Цели и задачи:** углубить и расширить знания по теме: «Матрицы. Действия над матрицами, их свойства», понять важность использования определителей в широком круге технических задач; убедиться в возможностях широкого использования обратной матрицы в различных областях науки и возможности программирования алгоритма её вычисления; осуществлять эффективный поиск необходимой информации с использованием различных источников, в том числе электронных, оформить результаты своей работы.

#### 1. Краткие теоретические сведения

Понятие матрицы. Типы матриц. Действия с матрицами: сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на число, транспонирование матриц, умножение матриц, возведение в степень.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Обозначаются прописными буквами  $A, B, C$ , .....

Общий вид матрицы, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Внизу справа при необходимости подписываются размеры матрицы:  $m$  – количество строк,  $n$  – столбцов.

Числа  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ , составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матричные элементы обычно обозначаются той же буквой (только строчной), что и сама матрица, а индексы показывают место элемента матрицы в матрице: первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых находится данный матричный элемент. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \text{ элементы } a_{11} = 1, \quad a_{23} = \frac{1}{2}, \quad \dots$$

Матрицы (так же как и числа) можно вычитать, складывать, перемножать. Поэтому среди матриц есть аналоги нуля и единицы. Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Она имеет следующий вид и обозначение:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Если в матрице (1) поменять местами строчки и столбцы (т.е. первую строчку сделать первым столбцом, вторую строку – вторым столбцом и т.д.), то полученная матрица носит название транспонированной по отношению к исходной матрице и обозначается  $A'$  или  $A^T$ :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Квадратная матрица – матрица, число строк и столбцов у которой совпадают. Общий вид квадратной матрицы:

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n$$

Числа  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  называются главной диагональю квадратной матрицы.

След матрицы - это сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы:  $\text{Sp}(A)$   
 $= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

### Пример:

Дана квадратная матрица  $A$  размерностью 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Решение:

Чтобы вычислить след исходной матрицы, нужно сложить элементы на главной диагонали:

$$\text{Sp}(A) = 2 - 1 + 3 = 4$$

**Ответ: след матрицы  $A$  равен 4**

Единичной называется такая квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю:

$$(3) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка  $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ , называется матрицей – строкой (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, матрицей – столбцом.

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется треугольной матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

нулю, называется диагональной матрицей. Например,

### Операции с матрицами

#### 1. Сумма матриц: $A + B$ .

Складывать можно только матрицы одного размера. При сложении двух матриц одного размера получается матрица того же размера, элементы которой равны сумме элементов слагаемых матриц, стоящих на соответствующих местах.

**Пример.**

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется вычитание матриц:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

#### 2. Умножение числа на матрицу.

При умножении числа на матрицу каждый ее элемент умножается на это число.

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

### Матричные уравнения

Это уравнения, в которых неизвестной является матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Пример.** Даны матрицы  $A$  и  $B$ . Найти матрицу  $X$ , удовлетворяющую следующему матричному уравнению  $4 \cdot A + 2 \cdot X = B$ .

**Решение.** Сначала рассматриваем это уравнение как обычное числовое и находим формулу для  $X$ . Затем действия, предписываемые этой формулой, выполняем по правилам действий с матрицами. Решая

обычным способом уравнение  $4 \cdot A + 2 \cdot X = B$ , получаем  $X = \frac{1}{2} \cdot (B - 4A)$  По правилу умножения



$$4A = 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}, \text{ по правилу вычитания матриц}$$

$$B - 4A = \begin{pmatrix} -22 & -5 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

числа на матрицу

Наконец, по правилу умножения числа на матрицу неизвестная матрица

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -22 & -5 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -5/2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 3. Умножение матриц: $A \cdot B$ .

Далеко не все матрицы можно перемножать.

Матрицы  $A$  и  $B$  (порядок следования важен!) называются согласованными, если число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$ .

Таким образом, если порядок матрицы  $A$  равен  $m \times p$ , то порядок согласованной с ней матрицы  $B$  должен быть равен  $p \times n$ . Перемножать можно только согласованные матрицы (отметим, что квадратные матрицы одного порядка всегда согласованы).

Произведением двух согласованных матриц  $A$  (размера  $m \times p$ ) и  $B$  (размера

$p \times n$ ) называется матрица  $C$  (размера  $m \times n$ ), элементы которой вычисляются по правилу: элемент  $c_{ij}$  матрицы  $C$  равен сумме попарных произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и  $j$ -го столбца матрицы  $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Например, если требуется получить элемент  $c_{21}$ , то нужно вторую строку матрицы  $A$  "умножить" на первый столбец матрицы  $B$ . Рассмотрим конкретные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы  $A$  и число строк матрицы  $B$  равны 2, значит,  $A$  и  $B$  согласованы, причем матрица  $A \cdot B$  будет размера  $3 \times 2$ . Тогда по определению произведение этих матриц  $A \cdot B$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 \\ 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 & 5 \cdot 3 + 6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 10 & 37 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}.$$

Найти в этом случае произведение  $BA$  невозможно, т.к. матрицы  $B$  и  $A$  не согласованы. Отсюда следует, что если две матрицы можно перемножить в одном порядке, то это не означает, что их можно перемножать в другом порядке. Можно показать, что в общем случае, даже когда произведения  $AB$  и  $BA$  определены, они не всегда дают одну и ту же матрицу (даже размерности матриц  $AB$  и  $BA$  могут быть разными).

Свойства операции умножения матриц.

1.  $A(B+C) = AB+AC$ ;
2.  $(A+B)C = AC+BC$ ;
3.  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ ,  $k$  - некоторое число;
4.  $A(BC) = (AB)C$ ;
5.  $A \cdot E = E \cdot A = A$ , где  $E$  - единичная матрица.

$n \times n \quad n \times n \quad n \times n$

**Пример.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Тогда  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ , а

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 20 & 29 \\ -2 & 4 & 7 \\ -10 & 12 & 13 \end{pmatrix} \text{ (проверьте!)}. \text{ Таким образом } A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Это не значит, что вообще не существует двух таких матриц  $A$  и  $B$ , для которых  $AB=BA$ .

Если для пары матриц  $A$  и  $B$  это свойство все же выполняется, то такие матрицы называются перестановочными (или коммукативными). Например, коммукативными будут матрицы  $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -1 & 10 & 8 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Легко перемножением в том и обратном порядке убедиться, что  $AB = BA =$   $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Отметим, что квадратные матрицы можно перемножать только, если они одного порядка. Можно указать одну особенную матрицу, которая перестановочна с любой квадратной матрицей. Это введенная выше единичная матрица. Легко в общем виде показать, что для любой квадратной матрицы  $A$  имеет место:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

#### Определитель квадратной матрицы. Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков.

Для каждой квадратной матрицы вводится важная ее числовая характеристика, называемая определителем этой матрицы. Правило, по которому по элементам данной квадратной матрицы произвольного порядка вычисляется ее определитель, достаточно сложно, поэтому будем вводить это правило «постепенно», повышая порядок определителя. Пока же ограничимся таким неконструктивным определением.

Каждой квадратной матрице можно по некоторому правилу поставить в соответствие число, которое называется определителем данной матрицы. Для определителя квадратной матрицы  $A$ , общий вид которой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n$$

применяются различные обозначения. Укажем наиболее употребительные:  $\det A$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta(A)$  или развернутое, в котором перечисляются все элементы данной матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Прямые черты, заменяющие круглые (матричные) скобки, указывают на то, что имеется в виду именно определитель матрицы, т.е. единственное число, а не сама матрица  $A$ .

Будем подходить к строгому определению определителя, рассмотрев это правило последовательно для определителей матриц 1-го, 2-го и 3-го порядков.

Определителем матрицы 1-го порядка называется число, равное единственному имеющемуся матричному элементу этой матрицы. Определение настолько простое, что нет необходимости иллюстрировать его примером.

Определитель матрицы 2-го порядка: если  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , то

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

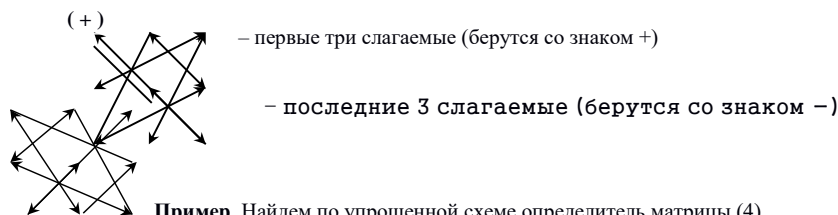
Например,  $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 11$ .

Рассмотрим определитель матрицы 3-го порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ .

Для вычисления определителя именно третьего порядка есть упрощенная формула

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 - (c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 + c_2 \cdot b_3 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2 \cdot c_3)$$

которая схематически (для запоминания) записывается так:



**Пример.** Найдём по упрощенной схеме определитель матрицы (4).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) \cdot 3 - ((-1) \cdot (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1) = -4$$

Все, что мы будем далее говорить для этой матрицы, справедливо и для квадратной матрицы любого порядка. Определение определителя матрицы содержит два новых понятия. Оказывается, для каждого элемента матрицы (а их 9) можно посчитать 2 числа, которые называются минором и алгебраическим дополнением этого элемента.

Минором элемента матрицы  $a_{ij}$  (обозначается  $M_{ij}$ ) называется значение определителя матрицы, получающейся из данной матрицы вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент (т.е. вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца).

Алгебраическим дополнением элемента матрицы  $a_{ij}$  (обозначается  $A_{ij}$ ) называется число, определяемое по формуле

$$(3) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Поскольку  $(-1)$  в целой степени принимает всего два значения ( $1$  — если показатель степени есть четное число и  $(-1)$  — если нечетное), то алгебраическое дополнение элемента матрицы либо ничем не отличается от минора этого элемента (если сумма его нижних индексов — т.е. сумма номеров строки и

столбца – есть четное число) или отличается от минора только знаком (если сумма нижних индексов нечетна).

**Пример.** Найти миноры и алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала ищем миноры всех элементов.

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -5, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Учитывая формулу (3) и приведенные ниже пояснения для этой формулы, получаем следующие алгебраические дополнения

$$A_{11}=7, A_{12}= -13, A_{13}=5, A_{21}= -3, A_{22}=5, A_{23}= -1, A_{31}= -5, A_{32}=7, A_{33}= -3$$

Для матрицы (4) для каждой строки (и столбца) сделаем: составим сумму попарных произведений ее (его) элементов на их алгебраические дополнения. Например, для второго столбца :  $1 \cdot (-13) + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 7 = -4$ . Взяв любой другой столбец (или строку), получим то же самое число (для данной матрицы  $(-4)$ ). **Это общее свойство всех квадратных матриц – результат таких вычислений не зависит от того, какую строчку или столбец матрицы мы выбрали. Поэтому корректно следующее определение.**

**Определителем** квадратной матрицы (**любого порядка!**) называется число, равное сумме попарных произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\text{Поэтому для матрицы (4) по определению: } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Для вычисления определителей матриц более высокого (чем третьего) порядка упрощенной схемы нет, поэтому используется только метод, данный в определении: выбирается строка или столбец матрицы и вычисляется сумма попарных произведений соответствующих элементов матрицы на их алгебраические дополнения. При этом вычисление алгебраических дополнений – самый трудоёмкий этап. Но поскольку строку (или столбец) можно выбирать произвольно (результат от этого не зависит), то проще выбрать ту, среди элементов которой как можно больше нулевых. При этом алгебраические дополнения нулевых элементов можно не считать, так как при составлении упомянутой выше суммы попарных произведений соответствующие слагаемые все равно обратятся в ноль.

$$\text{Пример. Вычислить определитель 4-го порядка.} \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Решение.** Самое большое количество нулей в любой из строк или столбцов равно 2. Поэтому для вычисления определителя выбираем любую строку или столбец с двумя нулями. Выберем, например, первый столбец (при этом говорят, что определитель будет разлагаться по первому столбцу):

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

Появившиеся два определителя 3-го порядка можно считать по приведенной выше упрощенной схеме.

Если среди элементов матрицы нулей мало (или нет вовсе), то можно специальными действиями привести определитель к такому виду, у которого есть строка (или столбец), в которой отличен от нуля только один элемент. После этого определитель легко вычисляется разложением по этой строке (столбцу). Привести определитель к такому виду помогают свойства определителей, рассмотренные ниже.

### Свойства определителей

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.
2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя равны или пропорциональны (т.е. элементы одной строки (столбца) получаются умножением элементов другой строки (столбца) на одно и то же число), то определитель равен нулю.
3. Если две строки (два столбца) поменять местами, то определитель изменит знак.
4. Общий множитель элементов любой строки или столбца можно выносить за знак определителя.
5. Если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Как сказано выше, с помощью этих свойств можно привести определитель к такому виду, у которого есть строка (или столбец), в которой отличен от нуля только один элемент. Для приведения определителя к такому виду необходимо:

- 1) Вынести общие множители (если таковые имеются) из строк или столбцов за знак определителя (свойство 4.). Это позволяет уменьшить элементы определителя (что облегчает его дальнейшее вычисление), а также, возможно, получить элементы, равные 1 или  $(-1)$ , что поможет выполнению следующего пункта.
- 2) Выбрать строку (или столбец), в которой есть элемент 1 или  $(-1)$  (если такие строки или столбцы есть) и с помощью этого элемента (и последнего свойства определителей) обнулять остальные элементы выбранной строки или столбца.

Иллюстрирует

сказанное

следующий

пример

**Пример.** 
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \{\text{вынесем } 2 \text{ из второй строки (свойство 4)}\} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

{С помощью элемента  $a_{22}=1$  и свойства 5 обнуляем все элементы второй строки, кроме самого  $a_{22}=1$ . Для этого а) прибавляем к 1-му столбцу 2-ой, умноженный поэлементно на  $(-5)$ ; б) прибавляем к 3-му столбцу 2-ой, умноженный на  $(-1)$ ; в) прибавляем к 4-му столбцу 2-ой, умноженный на

$$(-3)\} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -17 & 3 & 1 & -6 \\ -21 & 5 & -2 & -10 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем определитель по второй строке}\} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -7 & -4 & -2 \\ -17 & 1 & -6 \\ -21 & -2 & -10 \end{vmatrix} = \{\text{для облегчения вычисления определителя 3-го порядка выносим } (-1) \text{ из первых двух}$$

столбцов, а из третьего } 
$$(-2) \} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 17 & -1 & 3 \\ 21 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \{\text{вычисляем определитель третьего порядка по упрощенной схеме}\} = 440$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

**Пример.** Вычислить определитель  $\Delta$  приведением его к треугольному виду.

**Решение.** Сначала делаем нули в первом столбце под главной диагональю. Все преобразования будет выполнять проще, если элемент  $a_{11}$  будет равен 1. Для этого мы поменяем местами первый и второй столбцы определителя, что, согласно свойствам определителя, приведет к тому, что он сменит знак на противоположный:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Далее получим нули в первом столбце, кроме элемента  $a_{11}$ , для этого из третьей строки вычтем две первых, а к четвертой строке прибавим первую, будем иметь:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее получаем нули во втором столбце на месте элементов, стоящих под главной диагональю. И снова, если диагональный элемент будет равен  $\pm 1$ , то вычисления будут более простыми. Для этого меняем местами вторую и третью строки (и при этом меняется на противоположный знак определителя):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее делаем нули во втором столбце под главной диагональю, для этого поступаем следующим образом: к третьей строке прибавляем три вторых, а к четвертой - две вторых строки, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее из третьей строки выносим  $(-10)$  за определитель и делаем нули в третьем столбце под главной диагональю, а для этого к последней строке прибавляем третью:

$$\begin{aligned} \Delta &= -10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \\ &= -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-8) = -80 \end{aligned}$$

Ответ.  $\Delta = -80$

### Обратная матрица

Рассмотрим обычное простейшее уравнение  $2x=4$ . Известно, что для его решения необходимо разделить обе части этого уравнения на 2. Деление на 2 можно представить как умножение на число  $\frac{1}{2}$ ,

которое, в свою очередь, может быть записано как  $2^{-1}$ :  $x = 2^{-1} \cdot 4 = 2$ . Число  $2^{-1} = \frac{1}{2}$  называется числом,

обратным к числу 2, поскольку в произведении эти числа дают 1. В общем случае уравнение  $ax = b$

решается умножением обеих частей уравнения на число  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  (если  $a \neq 0$ ), которое называется

обратным к числу  $a$  и определяется как число, дающее в произведении с  $a$  число 1:  $a^{-1} \cdot a = 1$ . Таким

образом,  $x = a^{-1} \cdot b$ . Напомним, что обратное число  $a^{-1}$  существует для всех чисел  $a$ , кроме  $a = 0$ . Сейчас мы по аналогии с обратным числом введем понятие обратной матрицы, которое нам поможет решать уже не одно уравнение, а целые системы уравнений определенного вида.

Матрица  $B$  называется обратной матрицей для квадратной матрицы  $A$ , если  $A \cdot B = B \cdot A = E$ . Отметим, что в этом определении обратной матрицы недостаточно требовать, чтобы произведение матриц  $A$  и  $B$  в каком-либо одном порядке давало единичную матрицу, так как для матриц нет гарантии, что произведение этих матриц в другом порядке тоже даст единичную матрицу (в общем случае, как мы уже убеждались,  $A \cdot B \neq B \cdot A$ ).

Из определения следует, что обратная матрица  $B$  будет квадратной матрицей того же порядка, что и матрица  $A$  (иначе, как легко убедиться, одно из произведений  $A \cdot B$  или  $B \cdot A$  было бы не определено).

Обратная матрица для любой матрицы  $A$  единственна (если существует) и обозначается  $A^{-1}$  по аналогии с обратными числами. Таким образом, если  $A^{-1}$  есть матрица, обратная к матрице  $A$ , то выполняется:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Для всех ли обратных матриц существуют обратные? Как было сказано раньше, даже не для всех чисел существует обратное: для числа 0 обратного нет. Похожая ситуация наблюдается и с матрицами. Матрица называется вырожденной, если ее определитель = 0 и для такой матрицы обратной не существует. Справедлива следующая теорема:

**Теорема.** Обратная матрица для квадратной матрицы  $A$  вида (2) существует тогда и только тогда, когда матрица  $A$  невырожденная. В этом случае обратная матрица единственна и представляется в виде

[illegible]

где  $A_{ij}$  – алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  исходной матрицы.

Формула (5) обосновывает следующий алгоритм вычисления обратной матрицы (на примере матрицы размера 3x3) для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1. Вычисляем определитель матрицы  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ .

2. Вычисляем алгебраические дополнения всех ее элементов  $A_{11}, \dots, A_{33}$ .

3. Составляем так называемую «союзную» матрицу, заменяя элементы исходной матрицы их алгебраическими дополнениями и транспонируя получившуюся матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

4. Составляем обратную:  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Найти обратную для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Решение.** Воспользуемся тем, что ранее для этой матрицы уже были вычислены определитель и алгебраические дополнения всех элементов. Поэтому результаты первых двух пунктов приведенной выше схемы уже есть.

$$1. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

2.  $A_{11}=7, A_{12}=-13, A_{13}=5, A_{21}=-3, A_{22}=5, A_{23}=-1, A_{31}=-5, A_{32}=7, A_{33}=-3$ .

$$A^* = \begin{pmatrix} 7 & -13 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -13 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. «Союзная» матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -13 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Составляем обратную:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -13 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

Можно было произвести умножение числа  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$  на матрицу и получить обратную матрицу в обычном

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

матричном виде. При этом матрица уже не выглядит столь компактно, да и дальнейшие действия с ней (например, при решении систем линейных уравнений) производить уже не столь удобно. Поэтому обычно обратную матрицу оставляют в том виде, в котором она дана в Ответе.

Наиболее просто искать по приведенной схеме обратную матрицу для матриц второго порядка. Пусть дана в общем виде матрица второго порядка

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Построим обратную матрицу по приведенной выше схеме.

1.  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ .

2.  $A_{11} = d$ ,  $A_{12} = -c$ ,  $A_{21} = -b$ ,  $A_{22} = a$ .

3.  $A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

4.  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Таким образом, обратная для матрицы второго порядка  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  имеет вид:

(5a)  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , где  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ .

## 2. Примеры выполнения задания

**Пример.** Найти для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  обратную матрицу.

**Решение.** Определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ . По формуле (5a)

$$(56) \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Определить, имеет ли данная матрица обратную, найти обратную матрицу к данной, если это возможно

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение:**

Вычисляем определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6$$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$  матрица имеет обратную ей матрицу. Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$B = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

**Пример.**

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Решите уравнение:

$$(x+3) \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ x & 4 \end{vmatrix} - (2+x) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+3)(4x-4-3x)+4(3x-4x+4)=0.$$

$$(x+3)(x-4)+4(-x+4)=0.$$

$$(x-4)(x-1)=0.$$

$$x_1 = 4, x_2 = 1.$$

### 3. Задания для контрольной работы

#### 1. Сложить матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 2. Найти произведение $AB$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

#### 3. Найти $3A \cdot 2B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

#### 5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

#### 6. Найти матрицу, обратную к заданной

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

#### 7. Найти матрицу, обратную к заданной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

**Анализ и оценка выполненной работы.**

**Критерии оценивания:** за каждый правильный ответ даётся по 1 баллу; максимальное количество баллов 7.  
6-7 баллов – отметка «5» (отлично);  
4-5 баллов – отметка «4» (хорошо);  
3 балла – отметка «3» (удовлетворительно);  
менее 3 баллов – отметка «2» (неудовлетворительно)

**Терминологический диктант «Азбука линейной алгебры»**

1. Матрица А содержит 2 строки и 3 столбца. Матрица В содержит 3 строки и 2 столбца. Укажите правильный ответ («да, можно» / «нет, нельзя») на вопросы:  
а) можно ли сложить эти матрицы?  
б) можно ли матрицу В умножить на число  $1/3$ ? в)  
можно ли матрицу В умножить на матрицу А?  
г) можно ли матрицу В поделить на матрицу А, если в матрице А нет ни одного нулевого элемента?  
д) можно ли матрицу А возвести во вторую степень?
2. При транспонировании матрицы столбцы, стоящие на чётных местах перемещаются на нечётные, а строки – наоборот. Так ли это? Ответ: «да» / «нет»
3. Закончите предложение: «У особой матрицы определитель равен ...»
4. Укажите ошибку в предложении: «Элементами присоединённой матрицы являются миноры элементов заданной матрицы»
5. Может ли ранг матрицы быть больше числа строк? («да, может» / «нет, не может» / «всегда равен числу строк»)
6. Что можно сказать об определителе, если элементы двух его строк пропорциональны?
7. Укажите ошибку в предложении: «Если главный определитель системы равен нулю, то СЛУ имеет единственное решение»
8. При каком соотношении ранга системы  $r$  и количества её уравнений  $m$  система совместна. Укажите правильный ответ. (Варианты ответов:  $r=m$ ,  $r>m$ ,  $r<m$ , не зависит от этих соотношений)
9. Закончите предложение: «Базисный минор состоит из коэффициентов, ...»

**Вопросы для устного опроса по теме: «Матрицы и определители»**  
ОК2, ОК3, ОК6, 3-1, 3-2

1. Сформулируйте определение матрицы (числовой, функциональной).
2. Какие матрицы Вы знаете? Приведите примеры.
3. Перечислите действия, которые можно проводить над матрицами и их свойства.
4. Какими особенностями обладает операция умножения матриц?
5. Две ненулевые матрицы А и В умножаются. Возможно ли получить что  $AB=0$ ? Если это возможно, то приведите пример.
6. Перечислите действия, необходимые для вычисления определителя путем разложения по строке (столбцу).
7. Какие действия над строками (столбцами) определителя допустимы для арифметических преобразований?
8. При каких условиях определитель может быть равен 0? Приведите примеры.

**Практическая работа № 6**  
**Тема 6. Системы линейных уравнений**

## Системы линейных алгебраических уравнений

## Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

## Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Осциллограмма – иллюстрация электрических процессов в кривых второго порядка

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса: разработка алгоритма и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата

**Цель и задачи:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать системы линейных уравнений методом Гаусса; закрепить умения находить значения определителя системы методом Гаусса; закрепить умения находить обратную матрицу методом Гаусса; закрепить умения решать системы линейных уравнений методом Крамера; закреплять точность вычислений; развивать логическое мышление, умение находить рациональное решение задачи.

## 1. Краткие теоретические сведения

## Системы линейных алгебраических уравнений

Множество прикладных и чисто математических задач приводят к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (С.Л.А.У). Без преувеличения можно утверждать, что это одна из важнейших задач вычислительной математики.

Значимость задачи породила целый ряд методов ее решения. Среди этих методов есть универсальные и специализированные (т.е. применимые лишь к системам, имеющим некоторые специальные свойства). Методы отличаются друг от друга эффективностью, требованиями к объемам машинной памяти (при реализации на ЭВМ), закономерностями накопления ошибок в ходе расчетов. Не существует одного метода, который можно было бы во всех случаях предпочесть всем остальным, и поэтому знакомство с некоторыми методами является обязательным для квалифицированного вычислителя.

[illegible]

Итак, перед нами система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

(1)

Запись ее в такой форме достаточно громоздка. Будем использовать матричную форму записи, совершенно равносильную (1):  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

где

Методы решения С.Л.А.У. вида (1) можно разделить на два класса: *точные и итерационные*.

К *точным* методам относятся:

1. метод определителей (метод Крамера), хорошо известный из курса линейной алгебры;
2. матричное решение:  $X=A^{-1}B$  (если известна обратная матрица);
3. различные варианты метода исключения неизвестных (метод Гаусса).

Чаще всего такие методы реализуются на ЭВМ, и в процессе вычислений ошибки определения и погрешности арифметических действий неизбежно. В силу этого название «точный» не соответствует действительности.

К итерационным методам относятся приближённые методы решения С.Л.А.У., основанные на применении принципа сжимающих отображений (метод Зейделя, метод простой итерации).

### Метод Гаусса решения систем уравнений

Под названием «метод Гаусса» фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Наиболее популярным является метод, основанный на так называемой схеме *единственного деления*; этот метод имеет также и ряд модификаций.

Сам по себе метод Гаусса относится к точным методам. Это означает, что, если точно выполнять все требуемые действия, получено точное решение, поскольку погрешность метода в данном случае равна нулю.

Будем считать матрицу системы (2.7) невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю. Рассмотрим алгоритм, который получил название схемы единственного деления. Подвергнем систему (3.1) следующим преобразованиям.

Считая, что  $a_{11} \neq 0$  (ведущий элемент), разделим на  $a_{11}$  коэффициенты первого уравнения:

$$x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1 \tag{2}$$

Используя уравнение (2), легко исключить неизвестное  $x_1$  из остальных уравнений системы (достаточно из каждого уравнения вычесть уравнение (1), умноженное на соответствующий коэффициент при  $x_1$ ).

Над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное  $x_2$ .

Повторяя этот процесс, получим систему с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1; \\ \phantom{x_1 +} x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2; \\ \phantom{x_1 +} \phantom{x_2 +} x_n = \beta_n. \end{cases} \tag{3}$$

Из системы (3) последовательно находим значения неизвестных  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

Отметим, что последовательное исключение неизвестных называется *прямым ходом метода Гаусса*. Нахождение значений неизвестных – *обратным ходом*.

### Вычисление определителей матриц

Приступая к рассмотрению процесса решения системы линейных уравнений методом Гаусса, делается оговорка, что система невырожденная, т.е. её определитель отличен от нуля.

Вычисление определителя может представлять и самостоятельный интерес, т.к. такая задача нередко встречается в высшей математике.

Рассмотрим алгоритм вычисления определителя в связи с решением с.л.а.у. методом Гаусса по схеме единственного деления.

Обозначим определитель системы через D.

Что происходит с ним на каждом шаге реализации метода Гаусса?

$$\begin{aligned} &1) \ D/a_{11}; \\ &2) \ D/a_{11} \cdot a_{22}^{(1)}; \\ &\dots\dots\dots \\ &n) \ D/(a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных системы, полученная в результате - треугольная, с единицами по главной диагонали. Поэтому её определитель равен 1.

### Практический вывод:

Если необходимо вычислить определитель некоторой квадратной матрицы, надо решить систему уравнений с этой

матрицей и произвольной правой частью и воспользоваться формулой:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

### Применение метода Гаусса для вычисления обратной матрицы

Схема единственного деления может использоваться также и для вычисления элементов матрицы  $A^{-1}$ , обратной для невырожденной матрицы  $A$ . По определению,  $AA^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

Представим искомую матрицу  $A^{-1}$  и единичную матрицу  $E$  в виде совокупности векторов-столбцов. В такой записи соотношение  $AA^{-1} = E$  предстанет в виде совокупности из  $n$  систем линейных уравнений вида

$$Ax^{(i)} = e^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Решение каждой системы дает соответствующий столбец обратной матрицы.

Расширив таблицу схемы единственного деления, можно проиллюстрировать получение обратной матрицы рассмотренным методом.

### Метод Крамера решения систем уравнений

#### Теорема Крамера

Если определитель  $\Delta$  системы  $N$  линейных алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными отличен от нуля  $\Delta \neq 0$ , то

эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}$ .

$\Delta_j (j = 1, 2, \dots, N)$  – определители, образованные с  $\Delta$  заменой  $j$ -го столбца, столбцом из свободных членов.

Если  $\Delta = 0$ , а хотя бы один из  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$  отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет.

Если же  $\Delta_j = 0, (j = 1, 2, \dots, N)$ , то СЛАУ имеет множество решений.

#### 2. Примеры выполнения заданий

##### Пример 1.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad \text{Решение.}$$

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot (-3) - [(-1) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-3)] =$$

$$= 4 + 8 - 12 + 4 + 16 + 6 = 26.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то заданная система уравнений совместна и имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot (-3) - [(-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-3)] =$$

$$= 6 + 10 + 12 + 5 - 16 + 9 = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot 5 - [(-1) \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5] =$$

$$= 16 + 12 + 20 + 16 + 24 - 10 = 78;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot (-3) - [3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-3)] =$$

$$= 10 + 32 + 36 - 12 + 40 + 24 = 130.$$

По формулам Крамера находим неизвестные  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{130}{26} = 5$ .

Итак  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$  – единственное решение системы.

##### Пример 2.



Дана система четырех линейных алгебраических уравнений. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

**Решение.**

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных. Для этого разложим его по первой строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Найдем составляющие определителя:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-8) \cdot 5 \cdot 3 - [(-8) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 3] = -65;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 3 - [(-8) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3] = -69;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 2 - [(-8) \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 2] = 58;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - [2 \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 2] = 52.$$

Подставим найденные значения в определитель  $\Delta = -65 + 69 + 58 - 52 = 10$ .

Детерминант  $\Delta = 10 \neq 0$ , следовательно система уравнений совместная и имеет единственное решение. Вычислим определители по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим каждый из определителей по столбцу в котором есть больше нулей.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 3 \cdot (-25) = 70;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 + 3 \cdot (-29) = -80;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 \cdot (18) = -50;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 3 \cdot 22 = 60.$$

По формулам Крамера находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{70}{10} = 7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{80}{10} = -8, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{50}{10} = -5, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{10} = 6.$$

Решение системы  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 6$

### 3. Задания для контрольной работы

Решите системы уравнений: а) методом Гаусса; б) методом Крамера.

#### ВАРИАНТ 1

$$1. \begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

#### ВАРИАНТ 2

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 3y + z = -3; \\ x + 5y - z = -1; \\ 3x + y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

#### Анализ и оценка выполненной работы.

**Критерии оценивания:** за каждый правильный ответ даётся по 1 баллу; максимальное количество баллов 6.

5-6 баллов – отметка «5» (отлично);

3-4 балла – отметка «4» (хорошо);

2 балла – отметка «3» (удовлетворительно);

менее 2 баллов – отметка «2» (неудовлетворительно)

**Вопросы для устного опроса по теме: «СЛУ»**

ОК2, ОК3, ОК6, 3-1, 3-2

1. Сформулируйте алгоритм решения системы линейных уравнений по формулам Крамера.
2. Сформулируйте алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
3. В каком случае система линейных уравнений не имеет решения?
4. Перечислите действия, которые необходимо выполнить для обращения матрицы.
5. Какие виды матричных уравнений Вы знаете? Какие из них соответствуют системе линейных уравнений?

**Практическая работа № 7**

**Тема 7. Векторы и действия с ними**

**Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):**

Векторы и действия с ними

Скалярное произведение векторов

Векторы в пространстве

Практическое применение векторов

Смешанное произведение векторов

Векторы в законах физики и механики

**Векторы**

**Цель и задачи:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;  
закрепить умения решать задачи на векторы; овладеть навыками использования правил действий над векторами в векторной и координатной формах.

**1. Краткие теоретические сведения**

**1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются **скалярными**.

Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объём, температура, работа, масса.

Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие векторы называются **векторными**.

**1.1 Понятие вектора**

**Вектор**- это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Вектор, заданный парой  $(A, B)$  несовпадающих точек, обозначаемых символом  $\overrightarrow{AB}$

Точка  $A$  называется **началом**, а точка  $B$  – **концом вектора**.

Для обозначения векторов употребляется также строчные латинские буквы со стрелкой наверху:

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow$$

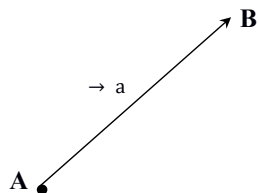
Длиной или модулем вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка и обозначается  $\rightarrow |AB|$  или  $|a|$ .

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называется нулевым и обозначается  $\rightarrow 0$ .

Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления не вводится.

Итак, каждый вектор, отличный от нулевого, имеет три характеристики:

1. Начальную точку;
2. Длину (модуль вектора)
3. Направление.



#### а. Коллинеарные вектора

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Записываются:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Коллинеарные вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  могут быть направлены **одинаково** или **противоположно**.

В первом случае векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **сонаправленными** ( $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ )  
во втором- **противоположно направленными** ( $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ ).

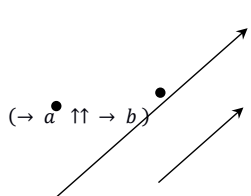
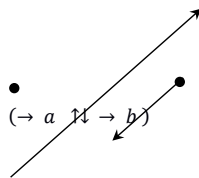


Рис.2



### 1.3. Равенство векторов

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **равными**

( $\vec{a} = \vec{b}$ ), если они одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку пространства.



Это правило сложения векторов называется правилом **треугольника**.

Сумма двух векторов можно построить также по правилу параллелограмма:

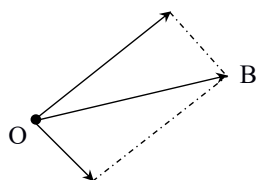
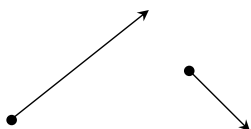
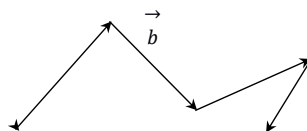
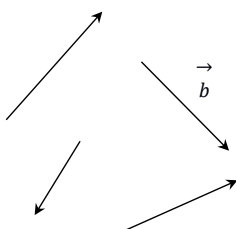


Рис. 5

$+=$

Если необходимо сложить три и более векторов, то применяется **правило многоугольника**:



$++=$

На рис. 3 векторы образуют прямоугольник.

Справедливо равенство

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}, \text{ но } \vec{a} \neq \vec{c}$$

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  - противоположны. Они имеют одинаковую длину, но противоположные по направлению  
( $\vec{a} = -\vec{c}$ )

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

### 2.1. Сложение векторов

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - два произвольных вектора. Возьмём произвольную точку  $O$  и построим вектор  $\vec{OA} = \vec{a}$ . От точки  $A$  отложим вектор  $\vec{AB} = \vec{b}$ .

Вектор  $\vec{OB}$ , соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов  $\vec{a}$

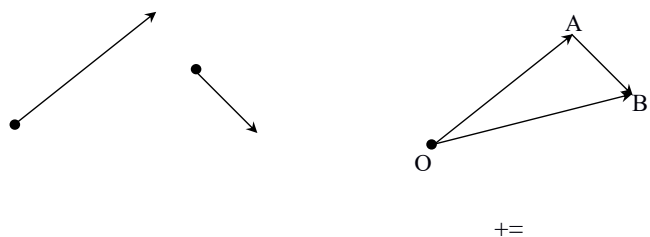


Рис. 4

### 2.2. Вычитание векторов

Под разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  понимается вектор  $\vec{c} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b}$  такой, что  $\vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{a}$



Рис.7

Можно вычитать векторы по правилу сложения:

$\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + (-\vec{b})$ , т.е. вычитание векторов заменить сложением вектора  $\vec{a}$  с вектором, противоположным вектору  $\vec{b}$ .

В параллелограмме, построенном на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , одна направленная диагональ является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , другая – разность.

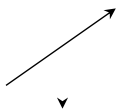
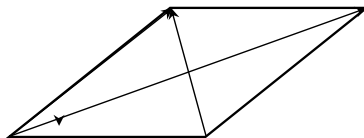


Рис. 8



### 2.3. Умножение вектора на число

Произведением нулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $m$  называется вектор, имеющий направление вектора  $\vec{a}$ , если  $m > 0$  и противоположное направление, если  $m < 0$ . Длина этого вектора равна произведению длины вектора  $\vec{a}$  на модуль числа  $m$ .

Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $m$  обозначается  $m\vec{a}$ . При любых  $m$  и  $\vec{a}$  векторы  $m\vec{a}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны и  $|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|$ .

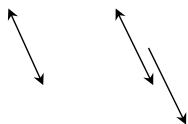
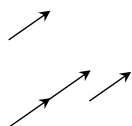
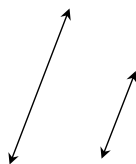


Рис. 9





#### 2.4. Угол между двумя векторами

Угол между двумя ненулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется углом между равными им векторами с общим началом.

Обозначается:

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$ , где  $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$ .

Частные случаи:

а) Если  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

б) Если  $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

в) Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

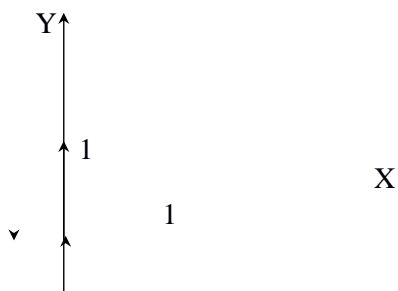
Если угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $90^\circ$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **перпендикулярными** или **(ортогональными)**.

### 3. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

#### 3.1. Угол между векторами и осью

Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется **осью**.

Вектор  $\vec{e}$ , имеющий длину  $|\vec{e}| = 1$  и направление, совпадающее с направлением оси, называется **единичным вектором** или **ортом** этой оси.



Угол между нулевым вектором  $\vec{0}$  и осью  $l$  называется углом между направлениями оси и вектора  $(\vec{0} \wedge \vec{e}) = \alpha$ , где  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  (см. рис. 12).

### 3.2. Проекция вектора на ось

Проекцией на ось называется направленный отрезок на оси, начало которого есть проекция начала вектора, а конец- проекция его конца.

Длина этого направленного отрезка берётся со знаком плюс, если направления отрезка и оси совпадают со знаком минус, если их направления противоположны.

Проекция вектора  $\vec{a} \neq 0$  на ось  $l$  равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла  $\alpha$  между осью и вектором.

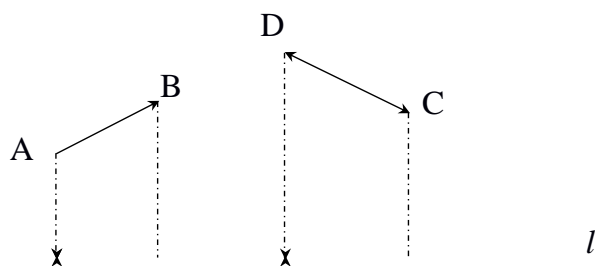
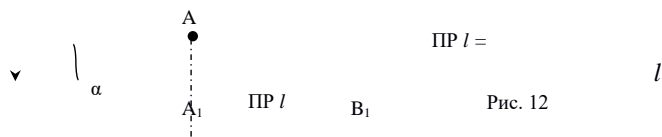


Рис. 11



ПР  $l =$

$l$

Рис. 12

### 3.3. Прямоугольная система координат

Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов  $\rightarrow i$  и  $\rightarrow j$ , отложенных от начала координат точки  $O$ .

Такую пару векторов называют перпендикулярным базисом на плоскости

Совокупность начала  $O$  и прямоугольного базиса ( $\rightarrow i, \rightarrow j$ ) называют прямоугольной системой координат на плоскости.

### 3.4. Координаты вектора

Если некоторый вектор  $\rightarrow a \neq 0$  имеет начало в точке  $A(x_A, y_A)$ , а конец - в точку  $B(x_B, y_B)$ , то координатами вектора  $\rightarrow a$  называю числа:  $X = X_B - X_A$   $Y = Y_B - Y_A$

Координаты вектора записывают так:

$$\rightarrow a \Rightarrow \overline{AB} = (X, Y) = (X_B - X_A; Y_B - Y_A)$$

### 3.5. Разложение вектора по координатным осям

Любой вектор  $\rightarrow a$  с координатами  $(x, y)$  можно представить в виде:

$$\rightarrow a = x \cdot \rightarrow i + y \cdot \rightarrow j$$

Это выражение называется разложением вектора по осям координат, где  $\rightarrow i$  - единичный вектор по оси  $OX$

$\rightarrow j$  - единичный вектор по оси  $OY$

Если начало вектора  $\rightarrow a$  находится в точке  $A(x_A, y_A)$ , а конец в точке  $B(x_B, y_B)$ , то разложение вектора  $\rightarrow a$  записывается так:

$$\rightarrow a \Rightarrow \overline{AB} = (X_B - X_A) \cdot \rightarrow i + (Y_B - Y_A) \cdot \rightarrow j$$

### 3.6. Правила действия над векторами, заданными своими координатами

Даны вектора:

$$\rightarrow a = (X_1 - Y_1) \text{ и } \rightarrow b = (X_2 - Y_2)$$

Координаты суммы двух (и более) векторов равны:

$$\rightarrow a + \rightarrow b = (X_1 + X_2; Y_1 + Y_2)$$

Координаты разности:

$$\rightarrow a - \rightarrow b = (X_1 - X_2; Y_1 - Y_2)$$

Координаты произведения векторов на число:

$$m \cdot \rightarrow a = (mX_1; mY_1)$$

### 3.7. Условие коллинеарности двух векторов

1. Если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны, т.е.

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = k$$

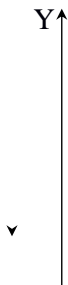
$$2. \rightarrow a \parallel \rightarrow b \Leftrightarrow \rightarrow a = k \cdot \rightarrow b$$

Если  $k > 0$ , то векторы  $\rightarrow a$  и  $\rightarrow b$  - сонаправленные.

Если  $k < 0$ , то векторы  $\rightarrow a$  и  $\rightarrow b$  - противоположно направленные.

### 3.8. Длина вектора. Расстояние между точками на плоскости.

Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку  $M$  плоскости  $XOY$ , называется радиус-вектором точку  $M$  и обозначается  $\rightarrow r$ .



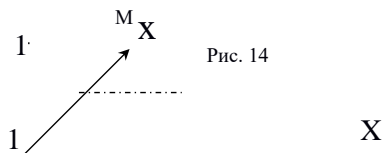


Рис. 14

Его координаты записываются так:

$$\vec{r} = \vec{OM} = (x, y)$$

Длина радиус-вектора  $\vec{r} = (x, y)$  находится по формуле:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Длина произвольного вектора с координатами

$\vec{a} = \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$  находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

С помощью этой формулы вычисляем также расстояние между двумя точками на плоскости.

### 3.9. Скалярное произведение двух векторов. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов.

Скалярным произведением двух нулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними и обозначается:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  заданы координатами

$$\vec{a} = (x_1; y_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2; y_2), \text{ то}$$

Скалярное произведение этих векторов можно выразить через их координаты по формуле:

$$\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2,$$

а угол между ними находится так:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения

1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух нулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является равенство нулю их скалярного произведения

$$(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} * \vec{b} = 0) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2. Скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$  называется скалярное произведение

$$\vec{a} * \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$$

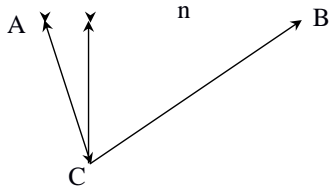
### 3.10. Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим некоторое свойство векторов, часто используемых при решении геометрических задач.

Очевидно, что  $C \in [AB]$  делит отрезок  $[AB]$  в данном отношении  $\frac{m}{n}$ , т.е.  $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n}$ , тогда и только тогда, когда  $\vec{AC} = \frac{m}{m+n} \vec{AB}$

(1)

м О



Если  $A, B$  и  $C$  заданы своими радиус- векторами  $\vec{OA}, \vec{OB}$  и  $\vec{OC}$  относительно некоторой точки  $O$ , то из (1)

$$\begin{aligned} \vec{OC} &\rightarrow \vec{OA} = \frac{m}{n}(\vec{OB} \rightarrow \vec{OC}), \text{ из корого находим} \\ \vec{OC} &= \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB} \end{aligned} \quad (2)$$

Формула (2) выражает радиус-вектор искомый точки  $C$ , делящий отрезок  $[\vec{AB}]$  в отношении  $\frac{m}{n}$ , через радиус-векторы

Заданных точек  $A$  и  $B$ . В частности, если точка  $C$  является серединой отрезка  $[\vec{AB}]$ , то

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

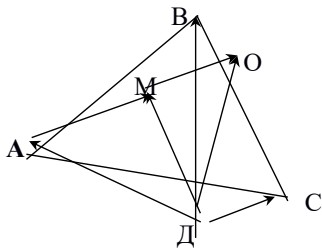
Докажем, что медианы произвольного треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $M$  такой, что:

1) Расстояние от точки  $M$  до каждой вершины треугольника равно  $\frac{2}{3}$  длины соответствующей медианы;

2) Для любой точки  $O$  справедливо соотношение

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Пусть точка  $M$  пересекает  $\frac{2}{3}$  длины отрезка  $[AD]$  от точки  $A$



Тогда

$$\begin{aligned} \vec{OM} &\Rightarrow \vec{OA} + \vec{AM} \Rightarrow \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AD} \Rightarrow \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{OD} \rightarrow \vec{OA}) = \\ &\Rightarrow \vec{OA} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) \rightarrow \vec{OA} \right) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \end{aligned}$$

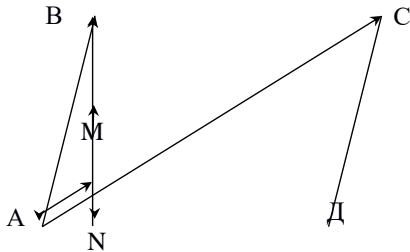
Тот же результат получается для любой другой медианы треугольника  $ABC$ . Это говорит о том, что  $M$  – общая точка всех трёх медиан.

Отсюда следует, что, если  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$  и  $O$  – произвольная точка пространства, то имеет место:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

**Задача.**

На стороне  $AD$  и диагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $|\vec{AM}| = \frac{1}{5}(\vec{AD})$  и  $|\vec{AN}| = \frac{1}{6}|\vec{AC}|$



Доказать, что точки M, N и B лежат на одной прямой. В каком отношении точка N делит отрезок [MB]?

**Решение:**

Чтобы убедиться в том, что M, N и B лежат на одной прямой, достаточно доказать, что векторы  $\vec{MN}$  и  $\vec{MB}$  коллинеарны.

По условию имеем

$$\vec{AM} = \frac{1}{5} \vec{AB}, \quad \vec{AN} = \frac{1}{6} \vec{AC}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{6} \vec{AC} - \frac{1}{5} \vec{AB} = \frac{1}{6} (\vec{AD} + \vec{DC}) - \frac{1}{5} \vec{AB} = \\ &= \frac{1}{30} (5 \vec{AD} - 2 \vec{AB} + 2 \vec{DC}) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{5} \vec{AB} = \frac{4}{5} \vec{AB} = \frac{4}{5} (5 \vec{AD} - 2 \vec{AB} + 2 \vec{DC})$$

Так как  $\vec{AB} = \vec{DC}$ , то из полученных равенств следует, что  $\vec{MB} = 6 \vec{MN}$ .

Это означает, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

Из равенства  $\vec{MB} = 6 \vec{MN}$  следует, что  $\frac{|NB|}{|MN|} = 5$ , т.е. точка N делит отрезок [MB] в отношении 5:1

## 2. Примеры решения задач

### Задача 1.

**Дано:** A (1;-1); B (-1;0) C(0;1)

$\vec{AB} = \vec{CD}$

**Найти:** D(x,y).

**Решение:**

1. Если A (1;-1); B (-1;0), то  $\vec{AB} = (-1-1;0-(-1))=(-2;1)$

2. Если C(0;1), D(x,y), то  $\vec{CD} = (x-0; y-1)$ .

3. По условию  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , тогда равны их координаты

$$\begin{aligned} x-0 &= -2 & x &= -2 \\ y-1 &= 1 & y &= 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x-0 &= -2 & x &= -2 \\ y-1 &= 1 & y &= 2 \end{aligned}$$

Таким образом, D(-2; 2).

**Ответ:** D (-2; 2).

### Задача 2.

Векторы  $\vec{a} = (1; -1)$  и  $\vec{b} = (-2; -2; k)$  коллинеарны.

Чему равно k?

**Решение:**

Т.к. векторы коллинеарны по условию, их соответствующие координаты пропорциональны  $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{k}, k=2$ .

**Ответ:** 2.

### Задача 3.

Даны векторы  $\vec{a} = (3; 2)$  и  $\vec{b} = (-2; 1)$

**Найти:** модуль вектора  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

**Решение:**

Для определения модуля вектора необходимо знать его координаты.

Координаты вектора  $2\vec{a} = (3 \cdot 2; 2 \cdot 2) = (6; 4)$ .

Координаты вектора  $3\vec{b} = (-2 \cdot 3; 1 \cdot 3) = (-6; 3)$ .

Координаты вектора  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (6 + (-6); 4 + 3) = (0; 7)$

Модуль искомого вектора:

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7.$$

**Ответ:** 7.

### Задача 4.

Выразить через единичные векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  следующие векторы:

а)  $\vec{a} = (-2; 4)$

б)  $\vec{a} = \vec{AB}$ , если  $A(-2; -1)$ ;

**Решение:**

а)  $\vec{a} = (-2; 4)$   $x = -2$   $y = 4$ .

По формуле  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$  получим

$\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ .

б)  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $A(-2; -1)$ ;  $B(4; -3)$

$\vec{a} = \vec{AB} = (4 - (-2); -3 - (-1)) = (6; -2)$

$\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ .

**Ответ:** а)  $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ , б)  $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ .

### Задача 5.

ABCD- ромб,  $|\vec{AB}| = 1$ ,  $\angle \text{BAD} = 30^\circ$ .

Найти длину диагонали ромба  $|\vec{AC}|$ .

Дано: ABCD- ромб  $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = 1$ ;  $\angle \text{BAD} = 30^\circ$ .

**Найти:**  $|\vec{AC}|$

**Решение:**

$$1. \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \text{ - по построению, тогда } |\vec{AC}|^2 = (\vec{AB} + \vec{AD})^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + |\vec{AD}|^2 \Rightarrow$$

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos \angle \text{BAD} + |\vec{AD}|^2$$

$$2. \quad |\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 1 \quad \angle \text{BAD} = 30^\circ \text{ по условию.}$$

$$|\vec{AC}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 1 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

**Ответ:**  $|\vec{AC}| = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

### 3. Задания для контрольной работы

1) В треугольнике ABC известны  $\vec{AB} = \vec{a}$  и  $\vec{AC} = \vec{b}$ .

Построить

$$\text{а) } \vec{c} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \quad \text{б) } \vec{d} = \frac{\vec{b} + \vec{a}}{2} \quad \text{в) } \vec{k} = -\frac{\vec{b} + \vec{a}}{2}.$$

2) Найти угол  $\alpha$  между векторами

$$\vec{a} = (1; \sqrt{3}) \text{ и } \vec{b} = (-0,5; 0,5\sqrt{3}).$$

3) Даны векторы  $\vec{a} = (1; 0)$  и  $\vec{b} = (1; 1)$ .

Найти такое число  $m$ , чтобы вектор  $\vec{a} + m\vec{b}$  был перпендикулярным вектору  $\vec{a}$ .

4) Проверить, коллинеарны ли векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ . Если да, то сонаправлены ли они?

Векторы соответственно заданы точками:

а)  $A(2;1)$   $B(-4; 4)$   $C(-1;1)$   $D(7; -5)$

б)  $A(2;1)$   $B(6; 5)$   $C(3;-1)$   $D(7; -2)$

в)  $A(1;1)$   $B(7; 3)$   $C(-4;-5)$   $D(5; -2)$

5) Найти длину вектора  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ,

$(\vec{a} \wedge, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

6) Даны точки:  $A(-2; -3)$   $B(2; 4)$   $C(5; 1)$

Разложить векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{CA}$  по единичным векторам  $\vec{i} + \vec{j}$ .

7) При каких значениях  $x$  векторы  $(x-1)\vec{a}$  и  $2\vec{a}$  сонаправлены, если  $\vec{a} \neq 0$ ?

8) При каких значениях  $m$  векторы  $(m^2-m-2)\vec{b}$  и  $m^3\vec{b}$  противоположно направлены, если  $\vec{b} \neq 0$ ?

9) В ромбе  $ABCD$  длина стороны равна 6, а величина угла  $BAD$  равна  $\frac{\pi}{3}$ . На стороне  $BC$  взята точка  $E$  такая, что  $EC=2$ . Найти расстояние от  $E$  до центра симметрии ромба.

10) В треугольнике  $ABC$  дано:  $\vec{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$  и  $\vec{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  
где  $\vec{i} + \vec{j}$  – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Доказать, что треугольник  $ABC$  – прямоугольный и вычислить его площадь.

#### Ответы к самостоятельной работе

2.  $60^\circ$

3. -1.

4. а)  $\frac{6}{8} = \frac{3}{-4} = k < 0 \Rightarrow$  векторы коллинеарны и противоположно направлены.

б)  $\frac{4}{4} = -\frac{1}{4}$  – координаты не пропорциональны, векторы не коллинеарны.

в)  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = k > 0 \Rightarrow$  векторы коллинеарны и направлены.

5.  $6\sqrt{3}$ .

6.  $\vec{AB} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$   $\vec{BC} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$   
 $\vec{CA} = -7\vec{i} - 4\vec{j}$ .

7. при  $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ .

8. при  $m \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$ .

9.  $\sqrt{13}$

10.  $S_{\Delta} 5$  кв.ед.

#### Анализ и оценка выполненной работы.

**Критерии оценивания:** за каждый правильный ответ даётся по 1 баллу; максимальное количество баллов 10.

9-10 баллов – отметка «5» (отлично);

7-8 баллов – отметка «4» (хорошо);

5-6 баллов – отметка «3» (удовлетворительно);

менее 5 баллов – отметка «2» (неудовлетворительно)

#### Вопросы для устного опроса по теме: «Векторы и действия с ними»

ОК2, ОК3, ОК6, З-1, З-2

1. Какими геометрическими способами можно выполнять операции сложения-вычитания векторов? Привести примеры.

2. Сформулируйте определение проекции вектора на числовую ось.

3. Дан вектор  $\vec{a}' = (-1; 2; 1)$ . Найти его длину и направляющие косинусы.

4. Приведите формулировку линейной зависимости векторов.

5. Что такое базис системы векторов, какие действия нужно выполнить для его определения?



6. Дайте определение скалярного произведения векторов.
7. Перечислите основные свойства скалярного произведения двух векторов
8. Приведите определение векторного и смешанного произведений векторов.
9. Перечислите основные свойства векторного двух и смешанного трёх векторов.
10. Какие задачи геометрии и механики решаются с привлечением векторного и смешанного произведений?
11. Проверьте свои навыки, решив задачу: треугольная пирамида SABC с вершиной в точке S задана координатами своих вершин: A(1; 1; 1), B(-1; 2; - 1), C(4; 2; 3) и S(6; 5; 4). Найдите угол между рёбрами AS и BC и высоту пирамиды.

### Практическая работа № 8

#### Тема 8. Аналитическая геометрия на плоскости

##### Творческая работа (подготовка рефератов-презентаций по темам):

Кривые второго порядка в электронике  
 Осциллограмма – иллюстрация электрических процессов в кривых второго порядка  
 Поверхности второго порядка вокруг нас  
 Кривые второго порядка в астрономии  
 Эллипсоид  
 Однополостный гиперболоид  
 Двуполостный гиперболоид  
 Гиперболический параболоид  
 Эллиптический параболоид.  
 Конус второго порядка.  
 Исследование формы поверхности методом сечений  
 Цилиндрические поверхности  
 Замечательные линии третьего порядка  
 Замечательные линии четвертого и высших порядков

##### Прямые и плоскости в практических задачах

**Цель и задачи:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать задачи по аналитической геометрии; углубить и расширить знания по темам «Прямые на плоскости. Кривые второго порядка», осуществлять эффективный поиск необходимой информации с использованием различных источников, в том числе электронных, оформить результаты своей работы.

##### 1. Краткие теоретические сведения

##### 1. НАЧАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Если на плоскости заданы две точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ , то расстояние  $d$  между ними находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1)$$

Направление отрезка  $AB$  определяется углом наклона этого отрезка к положительному направлению оси абсцисс (рис. 1)

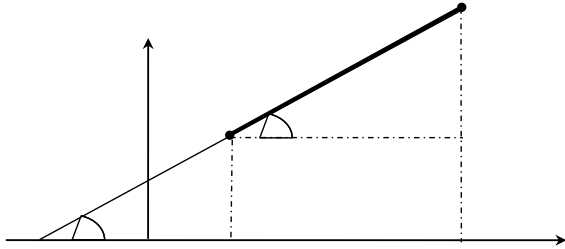


Рисунок 1 – Направление отрезка

Тангенс угла  $\varphi$  выражается через координаты концов отрезка по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \kappa = \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \quad (1.2)$$

Преобразование декартовых координат

Координаты  $(x; y)$  в данной системе преобразуются к координатам  $(x_1; y_1)$  в новой системе по формулам:

а) при параллельном сдвиге осей и перенесении начала координат в точку  $O_1(\alpha; \beta)$ :

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases} \quad (1.3)$$

б) при повороте осей на угол  $\varphi$

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases} \quad (1.4)$$

в) при параллельном сдвиге осей координат и последующем их повороте на угол  $\varphi$

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi + \alpha \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi + \beta \end{cases} \quad (1.5)$$

## II. ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

*Определение.* Уравнением линии называется уравнение  $F(x; y) = 0$  с переменными  $x$  и  $y$ , которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.

Входящие в уравнение линии переменные  $x$  и  $y$  называются текущими координатами, а буквенные значения – параметрами.

### ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

В декартовых координатах каждая прямая линия определяется уравнением первой степени и, наоборот, каждое уравнение первой степени определяет прямую линию.

В прямоугольных координатах уравнение прямой линии на плоскости задается в одном из следующих видов:

1. Общее уравнение прямой линии:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.1)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  числовые коэффициенты, коэффициенты  $A$  и  $B$  являются координатами вектора нормали  $\vec{N}(A; B)$ , который перпендикулярен данной прямой.

2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору нормали

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \quad (2.2)$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  - координаты вектора нормали, а  $x_0$  и  $y_0$  - координаты заданной точки.

3. Каноническое уравнение прямой: 
$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}, \quad (2.3)$$

где  $m$  и  $n$  являются координатами направляющего вектора  $\vec{s}$ , расположенного параллельно заданной прямой, а  $x_0$  и  $y_0$  являются координатами заданной точки прямой.

4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении:

$$y-y_0=k(x-x_0), \quad (2.4)$$

где  $x_0$  и  $y_0$  являются координатами заданной точки, а  $k$  - угловой коэффициент прямой.

4. Уравнение с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \quad (2.5)$$

где  $k$  - угловой коэффициент прямой,  $b$  - величина отрезка, отсекаемого данной прямой на оси ординат, считая от начала координат.

5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеющие координаты  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (2.6)$$

6. Уравнение прямой линии в отрезках на осях:

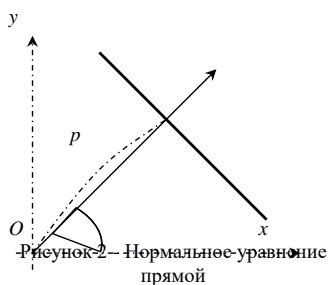
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.7)$$

где  $a$  и  $b$  - величины отрезков, которые прямая линия отсекает на осях координат, считая от начала координат.

7. Нормальное уравнение прямой линии:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (2.8.1)$$

где  $p$  - расстояние от начала координат до прямой,  $\vec{n}(\cos \alpha; \sin \alpha)$  - нормальный вектор, перпендикулярный прямой линии,  $\alpha$  - угол, между нормальным вектором и положительным направлением оси  $Ox$  (рис. 2).



Общее уравнение прямой можно привести к нормальному виду. Для этого необходимо уравнение прямой умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.8.2)$$

В результате мы получим уравнение прямой линии в нормальном виде:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (2.8.3)$$

Знак нормирующего множителя выбирается противоположный знаку свободного члена  $C$ .

Пусть заданы две прямые линии своими уравнениями с угловыми коэффициентами или общими уравнениями:

$$l_1: y = k_1x + b_1 \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: y = k_2x + b_2 \quad \text{или} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

1. Угловой коэффициент прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.9.1)$$

Или 
$$k = -\frac{A}{B} \quad (2.9.2)$$

2. Угол между прямыми, которые не индивидуализированы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (2.10.1)$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right| \quad (2.10.2)$$

В том случае, когда не указано, какая прямая является первой, а какая второй, то в числителе указанных выше формул можно брать коэффициенты в любом порядке. При одном порядке, мы найдем острый угол между прямыми, а при другом – смежный с ним тупой угол, потому что тангенсы смежных углов отличаются только знаком. Формулы (2.10.1) и (2.10.2) дают положительный тангенс, таким образом, всегда дают острый угол между прямыми.

3. Условия параллельности двух прямых

$$k_1 = k_2 \quad (2.11.1)$$

или

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (2.11.2)$$

4. Условия перпендикулярности прямых

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (2.12.1)$$

или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (2.12.2)$$

5. Расстояние от точки  $(x_0; y_0)$  до прямой, заданной уравнением  $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2.13)$$

III. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение: Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат.

В общем случае это уравнение имеет вид:

Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 (3.0)

1. Окружность.

Определение: Окружностью называется геометрическое место точек плоскости равноудаленных от данной точки плоскости (центр окружности).

Каноническое уравнение окружности со смещенным центром

(x - x\_0)^2 + (y - y\_0)^2 = R^2, (3.1.1)

где (x\_0; y\_0) - координаты центра окружности

R - радиус окружности

Если центр окружности совпадает с началом отсчета системы координат, то уравнение имеет вид:

x^2 + y^2 = R^2 (3.1.2)

2. Эллипс.

Определение: Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса:

x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (3.2.1)

где a - большая полуось эллипса;

b - малая полуось эллипса;

центр эллипса совпадает с началом координат.

Точки (-a; 0), (a; 0), (0; -b), (0; b) - вершины эллипса.

Точки F\_1(-c; 0) и F\_2(c; 0) - фокусы эллипса,

где имеет место основное тождество

c^2 = a^2 - b^2 (3.2.2)

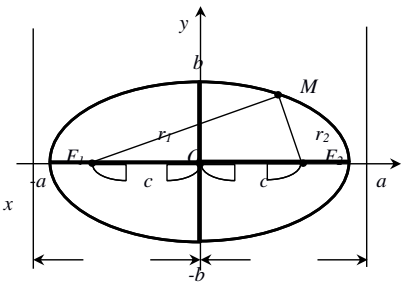


Рисунок 3. Эллипс

Число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \text{если } 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (3.2.3)$$

является эксцентриситетом эллипса, являющегося мерой его «сплюснутости» (при  $\varepsilon = 0$  эллипс становится окружностью).

Прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (3.2.4)$$

называются директрисами эллипса (если  $b > a$ , то директрисы определяются уравнением  $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ )

Отрезки

$$F_1M = r_1 = a + \varepsilon x \quad \text{и} \quad F_2M = r_2 = a - \varepsilon x \quad (3.2.5)$$

называются фокальными радиусами.

Если центр эллипса не совпадает с началом системы координат, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (3.2.6)$$

где

$(x_0; y_0)$  - координаты центра эллипса,  $a$  - большая полуось эллипса,  $b$  - малая ось эллипса.

### 3. Гипербола.

**Определение:** Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная.

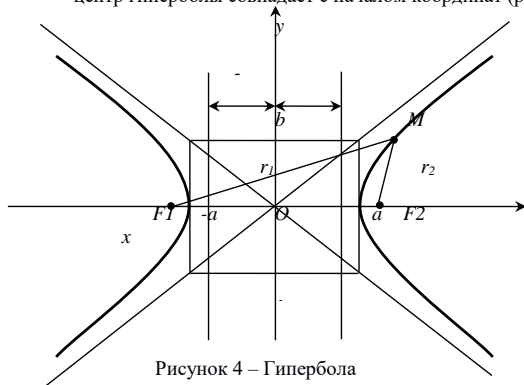
Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.3.1)$$

где  $a$  - действительная полуось гиперболы;

$b$  - мнимая полуось гиперболы;

центр гиперболы совпадает с началом координат (рис. 4)



Точки  $(-a; 0), (a; 0), (0; -b), (0; b)$  - вершины гиперболы.  
 Точки  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$  - фокусы гиперболы, где имеет место основное тождество

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3.3.2}$$

Прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{3.3.3}$$

являются асимптотами гиперболы.

Число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{ если } \varepsilon > 1 \tag{3.3.4}$$

называется эксцентриситетом гиперболы, который является мерой ее «сплюснутости».

Уравнение, имеющее вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{3.3.5}$$

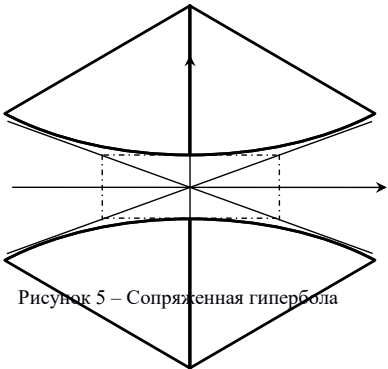


Рисунок 5 – Сопряженная гипербола

является уравнением сопряженной гиперболы (рис. 5)

Если  $a=b$ , то гипербола называется равнобочной, ее экс-центриситет равен  $\varepsilon = \sqrt{2}$ , а угол между асимптотами равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Уравнения

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \tag{3.3.6}$$

являются директрисами гиперболы.

Если гипербола сопряженная, то директрисы определяются уравнениями:

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \tag{3.3.7}$$

Отрезки  $F_1M = r_1$  и  $F_2M = r_2$  являются фокальными радиус-векторами точек гиперболы, которые задаются для левой и правой ветви гиперболы:

$$\begin{cases} r_1 = -\varepsilon x - a \\ r_2 = -\varepsilon x + a \end{cases}$$

для левой ветви

$$(3.3.8)$$

$$\begin{cases} r_1 = \varepsilon x + a \\ r_2 = \varepsilon x - a \end{cases}$$

для правой ветви

(3.3.9)

Если центр гиперболы не совпадает с началом координат, то уравнения гипербол имеют вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (3.3.10)$$

уравнение сопряженной гиперболы

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1, \quad (3.3.11)$$

где  $(x_0; y_0)$  - координаты центра гиперболы

$a$  - действительная полуось гиперболы

$b$  - мнимая полуось гиперболы

#### 4. Парабола.

**Определение:** Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (называемой фокусом) и от данной прямой (называемой директрисой)

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad \text{вдоль оси } OX, \quad (3.4.1)$$

$$x^2 = 2py \quad \text{вдоль оси } OY, \quad (3.4.2)$$

где  $P$  - параметр параболы или расстояние от фокуса до директрисы; вершина параболы расположена в начале координат.

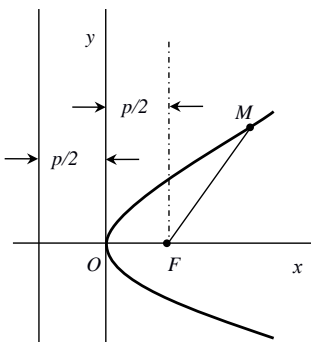


Рисунок 6 - Парабола

Точка  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  является фокусом параболы. (3.4.3)

Прямая  $x = -\frac{p}{2}$  - директриса параболы. (3.4.4)

Отрезок  $FM = r = x + \frac{p}{2}$  - фокальный радиус. (3.4.5)

Если координатная система выбрана таким образом, что вершина совпадает с началом координат и

- ось параболы совмещена с осью  $OX$ , то:

а) парабола расположена в правой полуплоскости

$$y^2 = 2px \quad (3.4.6)$$

б) парабола расположена в левой полуплоскости

$$y^2 = -2px; \quad (3.4.7)$$



- ось параболы совмещена с осью  $OY$ , то:

а) парабола расположена в верхней полуплоскости

$$x^2 = 2py; \quad (3.4.8)$$

б) парабола расположена в нижней полуплоскости

$$x^2 = -2py. \quad (3.4.9)$$

Если вершина параболы не совпадает с началом координат, то уравнение параболы имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \text{ с осью симметрии вдоль оси } OX; \quad (3.4.10)$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \text{ с осью симметрии вдоль оси } OY, \quad (3.4.10)$$

где  $(x_0; y_0)$  - координаты вершины параболы,  $p$  - параметр параболы.

## 2.Примеры решения заданий

### ЗАДАНИЕ 1.

Зная координаты точек  $A(2; 4)$ ,  $B(3; -2)$  и  $C(0; 1)$ , выполнить следующие вычисления:

- 1) Написать уравнение прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

**Решение:**

В формулу (2.6) уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

подставим значения заданных координат. Получим:

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 4}{-2 - 4}$$

$6x + y - 16 = 0$  - искомое уравнение прямой  $AB$ .

- 2) Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси  $OY$  прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

**Решение:**

Приведем уравнение прямой  $AB$  к виду [2.5]  $y = kx + b$ :

$$y = -6x + 16.$$

Следовательно,  $k = -6$ ,  $b = 16$ .

- 3) Написать уравнение прямой  $L_1$ , параллельной прямой  $AB$  и проходящей через точку  $C$ , используя значение углового коэффициента.

*Решение:* Используем условие параллельности прямых (2.11.1)  $k = k_1$ , в нашем случае  $k_1 = k = -6$ . Зная координаты точки  $C(0; 1)$ , для составления уравнения прямой  $L_1$  применим формулу (2.4)

$$y - y_C = k_1(x - x_C).$$

$$\text{Тогда} \quad y - 1 = -6(x - 0).$$

$$6x + y - 1 = 0 \text{ - искомое уравнение прямой } L_1.$$

- 4) Написать уравнение прямой  $L_2$ , перпендикулярной прямой  $AB$  и проходящей через точку  $C$ , используя значение углового коэффициента.

**Решение:**

Используем условие перпендикулярности прямых (2.12.1)  $k_2 = -\frac{1}{k}$ , в нашем случае  $k_2 = \frac{1}{6}$ . Зная координаты точки  $C(0; 1)$ , можно применить формулу (2.4) для нахождения уравнения прямой  $L_2$

$$y - y_C = k_2(x - x_C).$$

Получим

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 0)$$

$x - 6y + 6 = 0$  - искомое уравнение прямой  $L_2$ .

5) Найти расстояние между параллельными прямыми  $L_1$  и  $AB$ .

**Решение:**

Для вычисления расстояния воспользуемся формулой (2.13)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где  $(x_0; y_0)$  - координаты точки не лежащей на данной прямой,

$A, B, C$  - коэффициенты уравнения данной прямой.

Нам известны уравнения двух параллельных прямых  $L_1$  и  $AB$

$$L_1: 6x + y - 1 = 0$$

$$AB: 6x + y - 16 = 0$$

Чтобы воспользоваться данной формулой возьмем произвольную точку на одной из прямых и вычислим расстояние от нее до второй прямой.

Точка  $C(0; 1)$  принадлежит прямой  $L_1$ . Следовательно, коэффициенты будут иметь значения  $A = 6, B = 1, C = -16$ . Тогда

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 16|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = \frac{15\sqrt{37}}{37}$$

6) Написать уравнение прямой  $L_3$ , проходящей через точку  $B$  параллельно вектору  $\overrightarrow{AC}$ .

**Решение:**

Вектор, параллельный данной прямой, является сонаправленным вектором для данной прямой. Поэтому можем воспользоваться формулой (2.3)

$$\frac{x - x_B}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{y - y_B}{y_{\overrightarrow{AC}}}.$$

Вычислим координаты вектора  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(2; 4), C(0; 1)$

$$\overrightarrow{AC}(-2; -3).$$

И так как  $B(3; -2)$ , то

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{-3},$$

$3x - 2y - 13 = 0$  - искомое уравнение  $L_3$ .

7) Написать уравнение прямой  $L_4$ , проходящей через точку  $B$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{AC}$ .

**Решение:**

Вектор, перпендикулярный данной прямой, является вектором нормали данной прямой. Поэтому можем воспользоваться формулой (2.2)

$$x_{AC}(x-x_B)+y_{AC}(y-y_B)=0$$

Зная координаты точек  $A(2; 4)$ ,  $B(3; -2)$  и  $C(0; 1)$ , вычислим координаты вектора  $\overrightarrow{AC}$  и найденные значения подставим в уравнение.

$$\overrightarrow{AC}(-2; -3),$$

тогда  
 $-2(x-3)-3(y+2)=0$

$2x+3y=0$  - искомое уравнение прямой  $L_4$

8) Найти угол между двумя прямыми  $L_1$  и  $L_3$ .

**Решение**

Чтобы найти угол между двумя прямыми, можно воспользоваться формулой (2.10.1) или (2.10.2). Но поскольку уравнения прямых записаны в общем виде, то удобней формула (2.10.2)

$$tg\varphi=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|.$$

Поскольку в условии задачи не указано, какая из прямых является первой и какая второй, в таком случае в числителе этой формулы можно брать коэффициенты в любом порядке. При одном порядке мы найдем острый угол между прямыми, а при другом – смежный с ним тупой угол, потому что тангенсы смежных углов отличаются только знаком. Используемая нами формула дает положительный тангенс, т. е. всегда дает острый угол между прямыми.

Уравнения прямых:

$L_1: 6x+y-1=0,$

$L_3: 3x-2y-13=0$ .

Примем, что  $A_1, B_1$  коэффициенты прямой  $L_1$ ,  $A_2, B_2$  - прямой  $L_3$ . Тогда  $A_1=6, B_1=1, A_2=3, B_2=-2$ . Следовательно

$$tg\varphi=\left|\frac{6\cdot(-2)-3\cdot1}{6\cdot3-2\cdot1}\right|=\frac{15}{16}.$$

В таком случае,  $\varphi_1=arctg\frac{15}{16}, \varphi_2=\pi-arctg\frac{15}{16}$ .

9) Вычислить площадь треугольника, образованного прямой  $AB$  и осями координат.

**Решение:**

Прямая  $AB$  отсекает прямоугольный треугольник от координатного угла. Его площадь можно вычислить по формуле

$$S=\frac{1}{2}ab.$$

Значения величин отрезков можно найти, приведя уравнение прямой  $AB$  к виду уравнения прямой «в отрезках» (2.7):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Уравнение прямой  $AB$ :

$6x+y-16=0$ .

Получим:

$\frac{3x}{8}+\frac{y}{16}=1$ , где

$$a = \frac{8}{3}, b = 16$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 16 = \frac{64}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

10) Построить графики всех получившихся прямых в одной системе координат.

Чертеж:

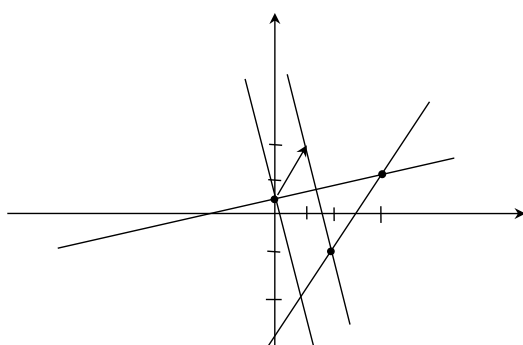


Рисунок 7 – К заданию 1

## ЗАДАНИЕ 2.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если большая полуось равна 5, а эксцентриситет равен  $\frac{1}{2}$ .

**Решение:**

Так как фокусы находятся на оси  $OX$  и лежат симметрично относительно начала координат, то уравнение эллипса будем искать в каноническом виде (3.2.1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

По условию задачи  $a = 5$ . Следовательно, решение задачи сводится к нахождению значения параметра  $b$ .

Для его вычисления можно воспользоваться основным тождеством эллипса (3.2.2)

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

где значение  $c$  мы можем вычислить, используя формулу эксцентриситета (3.2.3)

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

откуда

$$c = \varepsilon \cdot a.$$

Тогда

$$c = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2},$$

следовательно

$$b^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}.$$

Подставим найденные значения  $a^2$  и  $b^2$  в уравнения эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{75} = 1$$

- искомое уравнение эллипса.

**ЗАДАНИЕ 3.**

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если одна из точек гиперболы имеет координаты  $M(5; 3)$  и эксцентриситет равен  $2$ .

**Решение:**

Так как фокусы находятся на оси  $OX$  и лежат симметрично относительно начала координат, то уравнение гиперболы будем искать в каноническом виде (3.3.1)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Значения параметров  $a$  и  $b$  неизвестны, следовательно, решение задачи сводится к нахождению этих значений. Воспользуемся основным тождеством гиперболы (3.3.2)

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где значение параметра  $c$  можно выразить из формулы эксцентриситета (3.3.4)

$$c = \varepsilon \cdot a.$$

Тогда

$$\varepsilon^2 \cdot a^2 = a^2 + b^2.$$

Выразим  $a^2$ :

$$a^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

т.к.  $\varepsilon = 2$  по условию, то 
$$a^2 = \frac{b^2}{3}.$$

Подставим получившееся значение  $a^2$  в уравнение гиперболы, получим:

$$\frac{3x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из условия известно, что точка  $M(5; 3)$  принадлежит гиперболе, следовательно, ее координаты будут удовлетворять уравнению гиперболы:

$$\frac{3 \cdot 25}{b^2} - \frac{9}{b^2} = 1.$$

Вычислим значение  $b^2$ :

$$b^2 = 66$$

Зная значение  $b^2$ , можем найти значение  $a^2$ :

$$a^2 = 22$$

Найденные значения подставим в уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{22} + \frac{y^2}{66} = 1 \quad - \text{искомое уравнение гиперболы}$$

#### ЗАДАНИЕ 4.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус  $F(2; 3)$  и уравнение директрисы  $x + 2 = 0$ .

**Решение:**

Сделаем рисунок:

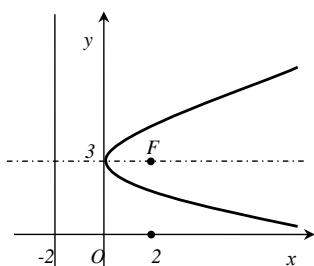


Рисунок 8 – К заданию 4

Из рисунка видно, что вершина параболы не совпадает с началом координат и ось симметрии параболы расположена вдоль оси  $OX$ , поэтому уравнение будем искать в виде (3.4.10)

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Ось симметрии параболы располагается перпендикулярно директрисе и проходит через вершину параболы.

Следовательно, в нашем случае она имеет уравнение  $y = 3$ , тогда координата  $y_0$  вершины параболы будет равна 3.

Вершина параболы расположена на оси симметрии между директрисой и фокусом, при этом находится на одинаковом расстоянии от них. Поэтому ее координату  $x_0$  можно вычислить по формуле нахождения координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_F + x_D}{2},$$

где  $x_F$  - координата  $x$  фокуса

$x_D$  - координата  $x$  точки, лежащей на директрисе.

По условию  $x_F = 2$ ,  $x_D = -2$ , тогда

$$x_0 = \frac{2 - 2}{2} = 0.$$

Таким образом, вершина параболы лежит в точке  $(0; 3)$ .

Вычислим параметр  $p$ . Его значение численно равно длине отрезка, расположенного на оси симметрии между фокусом и точкой пересечения оси симметрии с директрисой. Поскольку ось симметрии, в нашем случае, расположена вдоль оси  $OX$ , то параметр  $p$  вычислим по формуле:

$$p = x_F - x_D$$

тогда

$$p = 2 - (-2) = 4.$$

Найденные значения подставим в уравнение параболы:

$$(y-3)^2 = 4x \text{ - искомое уравнение параболы.}$$

### ЗАДАНИЕ 5.

Привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой и построить её.

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$$

#### Решение:

Для того чтобы привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду необходимо выделить выражения в виде формулы полного квадрата для переменных  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} (9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) + 4 &= 0 \\ 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 4 &= 0 \\ 9(x-2)^2 - 36 + 4(y-1)^2 - 4 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Перенесем свободный член вправо относительно знака равенства и все уравнение разделим на его значение, чтобы справа получить 1.

$$\begin{aligned} 9(x-2)^2 + 4(y-1)^2 &= 36 \\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Получили каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке  $O_1(2; 1)$ , большая полуось равна 2, а малая полуось равна 3.

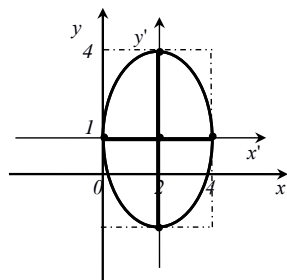


Рисунок 9 –к заданию 5

### 3. Задания для контрольной работы

#### ЗАДАНИЕ 1.

Зная координаты трех точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , выполнить следующие вычисления:

- 1) Написать уравнение прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .
- 2) Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси  $OY$  прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

- 3) Написать уравнение прямой  $L_1$ , параллельной прямой  $AB$  и проходящей через точку  $C$ , используя значение углового коэффициента.
- 4) Написать уравнение прямой  $L_2$ , перпендикулярной прямой  $AB$  и проходящей через точку  $C$ , используя значение углового коэффициента.
- 5) Найти расстояние между параллельными прямыми  $L_1$  и  $AB$ .
- 6) Написать уравнение прямой  $L_3$ , проходящей через точку  $B$  параллельно вектору  $\overrightarrow{AC}$ .
- 7) Написать уравнение прямой  $L_4$ , проходящей через точку  $B$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{AC}$ .
- 8) Найти угол между двумя прямыми  $L_1$  и  $L_3$ .
- 9) Вычислить площадь треугольника, образованного прямой  $AB$  и осями координат.
- 10) Построить графики всех получившихся прямых в одной системе координат.

1.  $A(1; 3), B(2; 2), C(-1; 0);$
2.  $A(-4; 2), B(2; -3), C(-10; 5);$
3.  $A(7; 2), B(8; -1), C(3; 3);$
4.  $A(2; 1), B(-1; 5), C(-7; -3);$
5.  $A(-1; -5), B(-6; 0), C(3; 6);$
6.  $A(0; -1), B(-2; 3), C(1; -5);$
7.  $A(5; 2), B(2; 5), C(1; 2);$
8.  $A(-2; 0), B(-1; 7), C(4; -8);$
9.  $A(14; 4), B(-5; -3), C(-2; -6);$
10.  $A(2; 4), B(3; 3), C(0; 1);$
11.  $A(-3; 3), B(3; -2), C(-9; 6);$
12.  $A(8; 3), B(9; 0), C(4; 4);$
13.  $A(3; 2), B(0; 6), C(-6; -2);$
14.  $A(0; -4), B(-5; 1), C(4; 7);$
15.  $A(1; 0), B(-1; 4), C(2; -4);$
16.  $A(6; 3), B(3; 6), C(2; 3);$
17.  $A(3; 0), B(2; 3), C(6; 1);$
18.  $A(-1; 1), B(0; 8), C(5; -7);$
19.  $A(15; 5), B(-4; -2), C(-1; -5);$
20.  $A(3; 5), B(4; 4), C(1; 2);$
21.  $A(-2; 4), B(4; -1), C(-8; 7);$
22.  $A(9; 4), B(10; 1), C(5; 5);$
23.  $A(4; 3), B(1; 7), C(-5; -1);$
24.  $A(1; -3), B(-4; 2), C(5; 8);$
25.  $A(2; 1), B(0; 5), C(3; -3);$
26.  $A(7; 4), B(4; 7), C(3; 4);$
27.  $A(4; 1), B(3; 4), C(7; 2);$
28.  $A(0; 2), B(1; 9), C(6; -6);$
29.  $A(16; 6), B(-3; -1), C(0; -4);$

## ЗАДАНИЕ 2.



Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1. его малая ось равна 10, а эксцентриситет равен  $\frac{12}{13}$ ;
2. точка  $M(8; 12)$  принадлежит эллипсу, а расстояние от нее до левого фокуса равно 20;
3. точки  $M_1(4; -\sqrt{3})$  и  $M_2(2\sqrt{2}; 3)$  принадлежат эллипсу;
4. точка  $M(2; -\frac{5}{3})$  принадлежит эллипсу, а эксцентриситет эллипса равен  $\frac{2}{3}$ ;
5. расстояние между директрисами эллипса равно 32, а эксцентриситет эллипса равен  $\frac{1}{2}$ ;
6. малая ось эллипса равна 6, а расстояние между его директрисами равно 13;
7. точка  $M(\sqrt{15}; -1)$  принадлежит эллипсу, а расстояние между фокусами равно 8;
8. точка  $M(-\sqrt{5}; 2)$  принадлежит эллипсу и расстояние между его директрисами равно 10;
9. расстояние между директрисами эллипса равно  $\frac{50}{3}$ , а эксцентриситет равен  $\frac{3}{5}$ ;
10. расстояние между фокусами эллипса равно 6, а эксцентриситет равен  $\frac{3}{5}$ ;
11. расстояние между директрисами эллипса равно 5, а расстояние между фокусами равно 4;
12. расстояние между фокусами эллипса равно 24, а эксцентриситет равен  $\frac{12}{13}$ ;
13. расстояние между директрисами эллипса равно  $\frac{32}{3}$ , а эксцентриситет равен  $\frac{3}{4}$ ;
14. большая ось эллипса равна 20, а эксцентриситет равен  $\frac{3}{5}$ ;
15. прямые  $x = \pm 8$  служат директрисами эллипса, его малая ось равна 8;
16. расстояние между фокусами эллипса равно 8, а его большая ось равна 10;
17. расстояние между вершинами, лежащими на большой оси эллипса, равно 16, а расстояние между его фокусами равно 10;
18. хорда, соединяющая две соседние вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом  $30^\circ$ ;
19. фокусами эллипса являются точки  $F_1(-1; 0)$  и  $F_2(1; 0)$ , а точка  $(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$  принадлежит эллипсу;
20. фокусами эллипса являются точки  $F_1(-2; 0)$  и  $F_2(2; 0)$ , а директрисами являются прямые  $x = \pm 18$ ;
21. расстояние от директрисы до ближайшей вершины эллипса равно 4, а до вершины, лежащей на оси  $OY$ , равно 8;
22. директрисами эллипса являются прямые  $x = \pm 4$ , а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси – квадрат;
23. большая ось эллипса равна 16, а фокусы отстоят от вершин на  $\frac{1}{5}$  ее длины;
24. расстояние между фокусами эллипса равно 6, а сумма малой и большой полуосей равно 9;
25. расстояние между фокусами эллипса равно  $2\sqrt{3}$ , а разность между большой полуосью и малой полуосью равно 1;
26. точки  $M_1(4; \frac{9}{5})$  и  $M_2(\frac{5\sqrt{5}}{3}; 2)$  принадлежат эллипсу;

27. точка  $M(-4; \sqrt{21})$  принадлежит эллипсу и эксцентриситет равен  $\frac{3}{4}$ ;
28. расстояние между фокусами эллипса равно 6, а расстояние между его директрисами равно  $\frac{50}{3}$ ;
29. большая полуось эллипса равна 5, а эксцентриситет равен 0,64;
30. эллипс проходит через точки  $M_1(2; 2)$  и  $M_2(4; 1)$ .

### ЗАДАНИЕ 3.

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

- точка  $M(-3; \frac{5}{2})$  принадлежит гиперболе и уравнения директрис  $x = \pm \frac{4}{3}$ ;
- известны уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{3}{4}x$  и расстояние между директрисами равно  $\frac{64}{5}$ ;
- известны уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{3}{4}x$  и уравнения директрис  $x = \pm \frac{16}{5}$ ;
- расстояние между директрисами гиперболы равно  $\frac{32}{5}$ , а мнимая ось равна 6;
- точка  $M(\frac{9}{2}; 1)$  принадлежит гиперболе, а уравнения её асимптот  $y = \pm \frac{2}{3}x$ ;
- расстояние между директрисами гиперболы равно  $\frac{228}{13}$ , а расстояние между фокусами равно 26;
- уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{4}{3}x$ , а расстояние между фокусами равно 20;
- расстояние между фокусами гиперболы равно 10 и мнимая ось равна 8;
- расстояние между фокусами гиперболы равно 6, а эксцентриситет равен  $\frac{3}{2}$ ;
- действительная ось гиперболы равна 16 и эксцентриситет равен  $\frac{5}{4}$ ;
- расстояние между директрисами гиперболы равно  $\frac{8}{3}$  и эксцентриситет равен  $\frac{3}{2}$ ;
- уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{3}{4}x$  и расстояние между директрисами равно  $\frac{64}{5}$ ;
- точки  $M_1(6; -1)$  и  $M_2(-8; 2\sqrt{2})$  принадлежат гиперболе;
- одна из точек гиперболы имеет координаты  $M(5; 3)$  и эксцентриситет равен  $\sqrt{2}$ ;
- длина действительной оси гиперболы равна 1, а точка  $M(1; 3)$  принадлежит гиперболе;
- директрисами гиперболы являются прямые  $x = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}$ , а точка  $M(-9; 4)$  принадлежит гиперболе;
- длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении 4:1;
- эксцентриситет гиперболы равен  $\frac{7}{5}$ , а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2;
- точка  $M(7; -2\sqrt{3})$  принадлежит гиперболе и удалена от левого фокуса на расстояние  $4\sqrt{7}$ ;

19. точка  $M\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$  принадлежит гиперболе, а асимптотами являются прямые  $y = \pm 2x$ ;
20. расстояние между фокусами гиперболы равно 16, а эксцентриситет равен  $\frac{4}{3}$ ;
21. асимптоты заданы уравнениями прямых  $y = \pm \frac{3}{5}x$  и гипербола проходит через точку  $M(10; -3\sqrt{3})$ ;
22. асимптоты заданы уравнениями  $y = \pm \frac{1}{2}x$  и расстояние между фокусами равно 10;
23. расстояние между фокусами гиперболы равно 10, а расстояние между вершинами равно 8;
24. эксцентриситет гиперболы равен  $\sqrt{2}$  и одна из её точек  $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ ;
25. гипербола проходит через точку  $M(9; 8)$ , а асимптоты гиперболы имеют уравнения  $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$ ;
26. эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;
27. действительная ось гиперболы равна 48, а эксцентриситет равен  $\frac{13}{12}$ ;
28. действительная ось гиперболы равна 16 и угол  $\varphi$  между асимптотой и осью абсцисс определяется условием  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ ;
29. уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{5}{12}x$  и точка  $M(24; 5)$  принадлежит гиперболе.

#### ЗАДАНИЕ 4.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус и уравнение директрисы:

1.  $F(9; 3)$ ,
2.  $F(5; 3)$ ,  
 $x - 2 = 0$
3.  $F(5; -3)$ ,  
 $x + 2 = 0$
4.  $F(-2; 4)$ ,  
 $y + 2 = 0$
5.  $F(-4; -3)$ ,  
 $y - 2 = 0$
6.  $F(5; -4)$ ,  
 $x + 9 = 0$
7.  $F(-1; -5)$ ,
8.  $F(6; -3)$ ,  
 $y + 9 = 0$   
 $x = 0$

$$9. \quad F(4; -6),$$

$$10. \quad \begin{array}{c} y=0 \\ F(6; 4), \end{array}$$

$$11. \quad \begin{array}{c} x=0 \\ F(-1; -3), \end{array}$$

$$12. \quad \begin{array}{c} y-1=0 \\ F(2; -3), \end{array}$$

$$13. \quad \begin{array}{c} y-1=0 \\ F(-4; 3), \end{array}$$

$$14. \quad \begin{array}{c} y+1=0 \\ F(3; 3), \end{array}$$

$$15. \quad \begin{array}{c} y+1=0 \\ F(-7; -2), \end{array}$$

$$16. \quad \begin{array}{c} x-3=0 \\ F(-7; 2), \end{array}$$

$$17. \quad \begin{array}{c} x-3=0 \\ F(7; -2), \end{array}$$

$$18. \quad \begin{array}{c} x+3=0 \\ F(7; 2), \end{array}$$

$$19. \quad \begin{array}{c} x+3=0 \\ F(-5; -1), \end{array}$$

$$20. \quad \begin{array}{c} x-1=0 \\ F(-5; 1), \end{array}$$

$$21. \quad \begin{array}{c} x-1=0 \\ F(5; -1), \end{array}$$

$$22. \quad \begin{array}{c} x+1=0 \\ F(5; 1), \end{array}$$

$$23. \quad \begin{array}{c} x+1=0 \\ F(4; 0), \end{array}$$

$$24. \quad \begin{array}{c} x+2=0 \\ F(0; 4), \end{array}$$

$$25. \quad \begin{array}{c} y+2=0 \\ F(6; 1), \end{array}$$

$$x+2=0$$

26.  $F(-6; 1),$

27.  $\begin{matrix} x-2=0 \\ F(3; 3), \end{matrix}$

28.  $\begin{matrix} x+3=0 \\ F(-3; 3), \end{matrix}$

29.  $\begin{matrix} y+3=0 \\ F(3; -3), \end{matrix}$

30.  $\begin{matrix} x+3=0 \\ F(-3; -3), \\ y-3=0 \end{matrix}$

# **ЗАДАНИЕ 5.**

Привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой и построить её.

1.  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$
2.  $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$
3.  $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 164 = 0$
4.  $8x^2 + 5y^2 + 64x - 40y + 168 = 0$
5.  $y^2 - 6x - 12y + 18 = 0$
6.  $9x^2 - 8y^2 - 90x - 48y + 225 = 0$
7.  $x^2 + 10x - 8y + 49 = 0$
8.  $x^2 - 2y + 2x + 12y - 33 = 0$
9.  $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$
10.  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
11.  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$
12.  $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$
13.  $4x^2 + 3y^2 + 32x + 52 = 0$
14.  $10x^2 - 3y^2 - 40x - 6y + 22 = 0$
15.  $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$
16.  $5x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$
17.  $2x^2 + 5y^2 - 8x + 10y + 3 = 0$
18.  $x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
19.  $2x^2 + 4x - y + 2 = 0$
20.  $9x^2 + 4y^2 - 72x - 32y + 172 = 0$

21.  $9x^2 - 4y^2 - 72x + 32y + 44 = 0$
22.  $9x^2 - 4y^2 - 72x + 32y + 116 = 0$
23.  $4x^2 - 3y^2 + 32x + 52 = 0$
24.  $4x^2 - 3y^2 + 32x + 76 = 0$
25.  $2x^2 - 5y^2 - 8x - 10y + 3 = 0$
26.  $2x^2 - 5y^2 - 8x - 10y + 13 = 0$
27.  $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
28.  $x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
29.  $y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$
30.  $y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$

**Анализ и оценка выполненной работы.**

**Критерии оценивания:** за каждый правильный ответ даётся по 1 баллу; максимальное количество 5 баллов

5 баллов – отметка «5» (отлично);

4 балла – отметка «4» (хорошо);

3 балла – отметка «3» (удовлетворительно);

менее 3 баллов – отметка «2» (неудовлетворительно)

**Вопросы для устного опроса по теме: «Аналитическая геометрия на плоскости»**

ОК2, 3-1, 3-2

1. Запишите каноническое уравнение плоской прямой линии, проведите анализ уравнения.
2. Перечислите и запишите уравнения прямой линии на плоскости при всех возможных вариантах её задания.
3. Проведите вывод уравнения прямой линии в отрезках.
4. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
5. Запишите формулу расстояния от точки до прямой.
6. Приведите определения окружности и эллипса, указав их характеристики.
7. Приведите определения гиперболы и параболы, указав их характеристики.
8. Проанализируйте общее уравнение плоских кривых второго порядка.
9. Какие методы преобразования координат на плоскости Вам известны? Проиллюстрируйте их на примерах.
10. Докажите нормальное уравнение эллипса по его определению.

**Порядок оформления практической работы**

Работа оформляется в отдельной тетради в соответствии с требованиями, предъявляемыми к практическим работам.

Работы должны быть написаны аккуратно (разборчивый почерк, оставление полей, записаны полностью условия заданий и т.п.).

Приступать к выполнению практической работы следует только после проработки теоретического материала на занятиях, по материалам конспектов и учебника «Математика» для СПО, под редакцией А.А.Дадаян.

#### Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$80 \div 89$	4	хорошо
$70 \div 79$	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

#### 3.4 Вопросы для зачета

1. Бесконечно большая и бесконечно малая величины. Свойства бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины и их использование при вычислениях пределов одномерных функций. Пример.
2. Техника вычисления предела одномерных функций: анализ способов на простейших примерах.
3. Векторная функция скалярного аргумента и ее производная: терминология и символика. Использование этой функции в технических дисциплинах. Пример.
4. Техника дифференцирования одномерной функции: дифференцирование по определению, табличный способ, дифференцирование сложной функции. Примеры.
5. Применение производной одномерной функции: уравнение касательной и нормали к графику функции. Пример.
6. Применение производной одномерной функции: исследование поведения функции и построение ее графика. Примеры.
7. Дифференциал первого порядка одномерной функции и его применение в приближенных вычислениях. Примеры.
8. Предел и непрерывность функции в точке.
9. Экстремум функции двух переменных: определения, понятия и обозначения. Виды экстремумов. Необходимые условия экстремума без доказательства. Рассмотреть пример.
10. Алгоритм исследования на экстремум функции двух переменных на конкретном примере.

- 11.Алгебраическая рациональная дробь и ее виды. Разложение рациональных дробей на простейшие: рассмотреть все случаи на примерах. Метод неопределенных коэффициентов.
- 12.Комплексное число и его множество: основные определения и обозначения. Формы записи комплексного числа; комплексная запись действительного числа. Примеры.
- 13.Арифметические действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Примеры.
- 14.Вывод формулы Муавра и извлечение корня из комплексного числа.

Решение уравнения  $x^n = A$ . Рассмотреть примеры.

**3.5 Комплект экзаменационных билетов 3-й курс по дисциплине:  
«Математические методы в решении прикладных профессиональных задач»**

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена  «__» _____ 20__ г. Протокол №__ от _____	<b>Экзаменационный билет № 1</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям) Курс 3 Семестр 6	
1. Определение комплексного числа. Сложение и умножение комплексных чисел. 2. Предел числовой последовательности. Принцип вычисления пределов числовых последовательностей. 3. Вычислите первообразную функции: $y = \cos x - 5 + 3x^2$ .  Преподаватель _____ / А.Б.Казарян		
<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования	<b>Экзаменационный билет № 2</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	



по направлению подготовки специалистов среднего звена		
«__» _____ 20__ г.	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	

1. Определение комплексного числа. Вычитание и деление комплексных чисел.  
 2. Понятие дифференциала. Запись. Свойства.  
 3. Вычислите неопределенный интеграл:  $\int (2 - x + 3x^2 - 6)dx$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б.Казарян

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем	Экзаменационный билет № 3	Согласовано _____
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем по направлению подготовки специалистов среднего звена	ОП.09 Математические методы в решении профессиональных задач	Согласовано _____
по направлению подготовки специалистов среднего звена	ОП.09 Математические методы в решении профессиональных задач	Директор МТК _____
Протокол №__ от _____	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	Согласовано _____
«__» _____ 20__ г.	Курс 3 Семестр 6	Директор МТК _____
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	Согласовано _____

1. Криволинейная трапеция. Виды. Формулы вычисления.  
 2. Определение вектора. Операции над векторами, их свойства.  
 1. Производные, сложных функций. Формулы вычисления.  
 3. Вычислите неопределенный интеграл:  $\int (15\cos x - 3x^4) dx$ .  
 2. Понятие матрицы. Виды матриц. Определитель матрицы.  
 3. Вычислите определенный интеграл:  $\int_0^1 (3x - x + 8)dx$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б.Казарян

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной	Экзаменационный билет № 5	Согласовано _____

цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
	«__» _____ 20 г. Протокол №__ от _____	
<p>1. Криволинейная трапеция. Формулы вычисления площади плоской фигуры.</p> <p>2. Решение СЛАУ методом Крамера.</p> <p>3. Вычислите предел функции: <math>\frac{x^2-4x+2}{1+x^2}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б.Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 6</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г. Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Понятие вектора. Коллинеарные векторы. Вычитание векторов.</p> <p>2. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>3. Вычислите предел функции: <math>\frac{x^2-16}{3x^2-16x+16}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б.Казарян</p>		

Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 7</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20__ г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		
<p>1. Понятие первообразной. Определение, свойства, таблица первообразных.</p> <p>2. Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов.</p> <p>3. Вычислите неопределенный интеграл: <math>\int (2 - x + 3x^2 - 6)dx</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б.Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 8</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20__ г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		
<p>1. Неопределенный интеграл. Определение, основная формула с обозначениями, принцип вычисления, основные свойства.</p> <p>2. Векторы. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.</p> <p>3. Вычислите производную функции: <math>y = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б.Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»
--

Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 9</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Определенный интеграл. Определение, основная формула с обозначениями, принцип вычисления.</p> <p>2. Векторы. Умножение вектора на число. Свойства векторов.</p> <p>3. Найти сумму и разность комплексных чисел: <math>(5+4i)+(2+3i)</math> и <math>(5+2i) - (4+8i)</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б.Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 10</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Векторы. Разложение вектора по направлениям. Координаты вектора.</p> <p>2. Определенный интеграл. Основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>3. Найти частное комплексных чисел: <math>\frac{1+3i}{2+i}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б.Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж
---

Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 11</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		

1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Метод Крамера.  
2. Векторы в пространстве. Компланарные векторы. Разложение вектора.  
3. Найти произведение комплексных чисел:  $(2+i)(3+4i)$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б.Казарян

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 12</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		

1. Пределы. Принцип вычисления пределов функции. Свойства.  
2. Комплексные числа. Виды записи. Операции над комплексными числами.  
3. Вычислите производную функции:  $y = x^5 + 3x^2 - 3 - e^x$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б.Казарян

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>
---

Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 13</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		

1. Неопределенный интеграл. Геометрический смысл. Свойства и правила вычисления.
2. Определение производной функции. Механический и геометрический смысл.
3. Вычислите производную функции:  $y = 7x - \sin 5x + 3e^x$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б.Казарян

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 14</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Пределы. Свойства. Правила вычисления.</li> <li>2. Понятие первообразной. Геометрический смысл. Таблица первообразных.</li> <li>3. Вычислите производную функции: <math>y = \cos 5x - \sin 3x + \ln(2x) + 10x - 7e^x</math>.</li> </ol>		
Преподаватель _____ / А.Б. Казарян		

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b>
---

Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 15</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		
<p>1. Свойства пределов, раскрытие неопределенностей.</p> <p>2. Комплексные числа. Запись. Действия над комплексными числами.</p> <p>3. Вычислите производную функции: <math>y = \ln(2x+7) + \sin 3x - 5x + 8</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 16</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		
<p>1. Комплексные числа. Сложение и умножение комплексных чисел.</p> <p>2. Предел функции. Замечательные пределы, свойства пределов.</p> <p>3. Дано <math> \vec{c} =5</math>, <math> \vec{d} =6</math>, а угол между векторами <math>\vec{c}</math> и <math>\vec{d}</math> равен <math>60^\circ</math>. Найти произведение: <math>\vec{c} \vec{d}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж
---

Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 17</b>	Согласовано
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
«__» _____ 20 г.	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	

1. Матрицы и определители. Действия с матрицами. Вычисление определителей.
2. СЛАУ. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
3. Вычислите производную функции:  $y = (5x-2)\sqrt{x} - 7e^x + 3$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 18</b>	Согласовано
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
«__» _____ 20 г.	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	

1. Матрицы. Виды матриц. Определитель матрицы.
2. Векторы в плоскости и в пространстве. Компланарные векторы.
3. Даны векторы  $\vec{a}\{3;-4;1\}$ ,  $\vec{b}\{-1;0;2\}$ . Найти: 1)  $\vec{a}\vec{b}$ ; 2)  $b^2$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян



<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 19</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г. Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Определитель матрицы. Вычисление определителя разложением по элементам первой строки.</p> <p>2. Комплексные числа. Виды записи. Мнимая единица.</p> <p>3. Найти длину вектора <math>\vec{c} = -2\vec{AB}</math>, если <math>A\{3;4;1\}</math>, <math>B\{-1;-3;5\}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 20</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г. Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Дифференцирование функции одной переменной. Правила вычисления.</p> <p>2. Определитель матрицы. Вычисление определителя «правилом треугольников».</p> <p>3. Вычислите частное комплексных чисел: <math>\frac{2-3i}{1+i}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 21</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г. Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Интегрирование функций одной переменной. Правила вычислений.</p> <p>2. Действия над векторами с заданными координатами.</p> <p>3. Вычислите частное комплексных чисел: <math>\frac{3-2i}{5+i}</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 22</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г. Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
<p>1. Определитель матрицы. Вычисление определителя «правилом треугольников».</p> <p>2. Пределы. Правила раскрытия неопределенностей.</p> <p>3. Найти произведение комплексных чисел: <math>(2+3i)(1-4i)</math>.</p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж	
Рассмотрено предметной	Согласовано

цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 23</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		

1. Матрицы. Свойства. Действия над матрицами.
2. Векторы в пространстве. Компланарные векторы.
3. Найти сумму и разность комплексных чисел:  $(5-4i)+(3+2i)$  и  $(4-3i)-(1+i)$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 24</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20 г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20 г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		

1. Определенный интеграл. Приложения интегралов.
2. Скалярное произведение векторов. Формулы вычисления.
3. Найти матрицу  $C=3A+2B$ , если  $A=(4\ 3\ 7\ 5\ -2\ 0\ 7\ 2\ 3)$  и  $B=(3\ 2\ 4\ 1\ 5\ -3\ -1\ 0\ 2)$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж	
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования	<b>Экзаменационный билет № 25</b>

по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	_____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
«__» _____ 20__ г.	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	

1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Правила и свойства.  
2. Векторы в пространстве. Формулы длины вектора. Разложение вектора.  
3. Найти матрицу  $C=2A - 3B$ , если  $A=(4\ 3\ 7\ 5 - 2\ 0\ 7\ 2\ 3)$  и  $B=(3\ 2\ 4\ 1\ 5 - 3 - 1\ 0\ 2)$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 26</b>	Согласовано
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20__ г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		

1. Интегральное исчисление функции одной переменной. Правила и свойства.  
2. Векторы. Свойства. Разложение вектора по трем ортам.  
3. Вычислить определитель по «правилу треугольников»:  $[0\ 1\ 2\ 1 - 2\ 1 - 2\ 1\ 1]$ .

Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 27</b>	Согласовано
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20__ г.		

Протокол №__ от _____	Курс 3 Семестр 6	
1. Пределы. Виды неопределенностей. Правила вычисления. 2. Векторы. Вычисление скалярного произведения векторов. 3. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ - & 1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ . Преподаватель _____ / А.Б. Казарян		

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена  «__» _____ 20__ г. Протокол №__ от _____	<b>Экзаменационный билет № 28</b>  <b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
	Курс 3 Семестр 6	
1. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Гаусса. 2. Скалярное умножение векторов. Скалярный квадрат. Угол между векторами. 3. Решите СЛАУ методом Крамера: $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$ Преподаватель _____ / А.Б. Казарян		

<b>ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)»</b> <b>Международный технологический колледж</b>		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена  «__» _____ 20__ г. Протокол №__ от _____	<b>Экзаменационный билет № 29</b>  <b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	Согласовано Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
	Курс 3 Семестр 6	
1. СЛАУ. Правило Крамера.		

2. Вычисление угла между векторами с заданными координатами.
3. Решите СЛУ методом Крамера:  $\{5x + 8y + z = 2; 3x - 2y + 6z = -7; 2x + y - z = -5.$
- Преподаватель \_\_\_\_\_ / А.Б. Казарян

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РОСБИОТЕХ)» Международный технологический колледж		
Рассмотрено предметной цикловой комиссией информационных систем и программирования по направлению подготовки специалистов среднего звена	<b>Экзаменационный билет № 30</b>	Директор МТК РОСБИОТЕХ _____ Л.Р.Ибрашева «__» _____ 20__ г.
	<b>ОП.09 Математические методы в решении прикладных профессиональных задач</b>	
	Специальность: 15.02.10 Мехатроника и робототехника (по отраслям)	
«__» _____ 20__ г.	Курс 3 Семестр 6	
Протокол №__ от _____		
<p>1.Основные понятия системы линейных уравнений. Правила решения произвольной СЛАУ.</p> <p>2. Линейные операции над геометрическими векторами.</p> <p>3.Решите СЛАУ методом Крамера: <math>\{x + 2y + z = 4; 3x - 5y + 3z = 1; 2x + 7y - z = 8.</math></p> <p>Преподаватель _____ / А.Б. Казарян</p>		

#### Критерии оценки уровня и качества подготовки студентов

**"Отлично"** - если студент глубоко и прочно усвоил весь программный материал в рамках указанных общих и профессиональных компетенций, знаний и умений. Исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, тесно увязывает с условиями современного производства, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами и практическими заданиями, правильно обосновывает принятые решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.

**"Хорошо"** - если твердо студент знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических заданий.

**"Удовлетворительно"** - если студент усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения в выполнении практических заданий.

**"Неудовлетворительно"** - если студент не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания, задачи.

### 3.5 Информационное обеспечение обучения

#### 3.5.1. Основные источники:

1. Математика: учебник и практикум для СПО/ И.Ю. Седых, Ю.Б. Гребенщиков, А.Ю. Шевелев – М.: Издательство Юрайт, 2024 г. – 443с. <https://biblioonline.ru/viewer/matematika-413847#page/2>
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов. - М.: Дрофа, 2024. - 204с.
3. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. Проф. Образования. - М.: Образовательно-издательский центр «Академия», ОАО «Московские учебники», 2023. - 416с
4. Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс», 2023 -380с
5. Филимонова Е.В. Математика – Серия: Среднее профессиональное образование. Ростов-на-Дону «Феникс», 2022
6. Математика в примерах и задачах: учеб. пособие / Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева, О.М. Дегтярева. — М.: ИНФРА М, 2022. — 372 с. <http://znanium.com>

### 3.5.2. Дополнительные источники

1. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2021
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – Москва: Бином, 2021. – 640с.
3. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 320с

### 3.5.3. Электронные издания

1. Электронно-библиотечная система «РОСБИОТЕХ». Действует бессрочно. Режим доступа: <http://e-learning.mgupr.ru/>
2. Электронно-библиотечная система «Лань». Издательство Лань. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/>
3. Электронно-библиотечная система «ЮРАЙТ». Режим доступа: <https://biblio-online.ru/>
4. Электронно-библиотечная система IPRbooks, ООО «Ай Пи Эр Медиа». Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>

5. Электронная база презентаций Инфоурок: <https://infourok.ru/>

15. Замечательные линии четвертого и высших порядков.

Тематика презентаций по теме «Интегральное исчисление»:

1. Физические приложения определенного интеграла

### **Мультимедийная презентация**

Тематика презентаций по теме «Аналитическая геометрия»:

1. Поверхности вращения в архитектурных сооружениях.
2. Кривые второго порядка в электронике.
3. Осциллограмма – иллюстрация электрических процессов в кривых второго порядка.
4. Поверхности второго порядка вокруг нас.
5. Кривые второго порядка в астрономии.
6. Эллипсоид.
7. Однополостный гиперболоид.
8. Двуполостный гиперболоид.
9. Гиперболический параболоид.
10. Эллиптический параболоид.
11. Конус второго порядка. 236
12. Исследование формы поверхности методом сечений.
13. Цилиндрические поверхности.

14. Замечательные линии третьего порядка.

2. Интегральное исчисление в технике

3. Практическое применение двойных интегралов

4. Практическое применение тройного интеграла

5. Интегральное исчисление в строительстве и архитектуре

6. Применение интегрального исчисления для решения задач в электронике и вычислительной технике

### Требования к оформлению самостоятельной работы в виде презентации:

Презентация должна содержать не менее 8 и не более 15 слайдов.

В оформлении презентаций выделяют два блока: оформление слайдов и представление информации на них.

Для создания качественной презентации необходимо соблюдать ряд требований, предъявляемых к оформлению данных блоков.

Оформление слайдов:

Стиль	<ul style="list-style-type: none"><li>· Соблюдайте единый стиль оформления</li><li>· Избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации.</li><li>· Вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текстом, иллюстрациями).</li></ul>
Фон	<ul style="list-style-type: none"><li>· Для фона предпочтительны холодные тона</li></ul>
Использование цвета	<ul style="list-style-type: none"><li>· На одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовка, один для текста.</li><li>· Для фона и текста используйте контрастные цвета.</li><li>· Обратите внимание на цвет гиперссылок (до и после использования).</li></ul> Таблица сочетаемости цветов в приложении.
Анимационные эффекты	<ul style="list-style-type: none"><li>· Используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде.</li><li>· Не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде.</li></ul>

Представление информации:

Содержание информации	<ul style="list-style-type: none"><li>· Используйте короткие слова и предложения.</li><li>· Минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных.</li><li>· Заголовки должны привлекать внимание аудитории.</li></ul>
-----------------------	--



Расположение информации на странице	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Предпочтительно горизонтальное расположение информации.</li> <li>· Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.</li> <li>· Если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.</li> </ul>
Шрифты	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Для заголовков – не менее 24.</li> <li>· Для информации не менее 18.</li> <li>· Шрифты без засечек легче читать с большого расстояния.</li> <li>· Нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации.</li> <li>· Для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание.</li> <li>· Нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных).</li> </ul>
Способы выделения информации	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Следует использовать:</li> <li>· рамки; границы, заливку;</li> <li>· штриховку, стрелки;</li> <li>· рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов.</li> </ul>
Объем информации	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут одновременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений.</li> <li>· Наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде.</li> </ul>
Виды слайдов	<p>Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• с текстом;</li> <li>• с таблицами;</li> <li>• с диаграммами.</li> </ul>

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

### Критерии оценки при подготовке презентации:

Оценка "отлично" выставляется студенту, если: в презентации полностью раскрыта выбранная, соблюдены требования к оформлению презентации; студент может обосновать свои суждения, привести необходимые примеры, ориентируется в структуре презентации.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если: в презентации не полностью раскрыта выбранная тема, соблюдены требования к оформлению презентации; студент затрудняется в обосновании своих суждений, ориентируется в структуре презентации

Оценка "удовлетворительно" выставляется студенту, если: в презентации не полностью раскрыта выбранная тема, соблюдены не все требования к оформлению презентации; студент затрудняется в обосновании своих суждений, плохо ориентируется в структуре презентации.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не по вопросу.

3. Система оценивания знаний и умений по учебной дисциплине

Оценка освоения дисциплины предусматривает использование накопительной системы оценивания (выполнение практических работ в соответствии с заданиями, полнота продемонстрированных знаний и умение применять их при выполнении практических работ и сдачу экзамена.

4. Универсальная шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
75 ÷ 89	4	хорошо
60 ÷ 74	3	удовлетворительно
менее 60	2	не удовлетворительно